

Dodatne naloge

13. januar 2017

1. V konveksnem štirikotniku označi razpolovišča stranic. Poveži med sabo sosednja razpolovišča. Dokaži, da je dobljen lik paralelogram.
2. V notranjosti kroga je dana točka A , različna od središča kroga. Kaj je množica razpolovišč vseh tetiv kroga, ki gredo skozi A ?
3. Pokaži, da 2^n ne deli $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ za nobeno naravno število n .
4. Popolno število je število, ki je enako vsoti svojih pravih deliteljev. Primer: $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Izračunaj vsoto recipročnih vrednosti $(\frac{1}{x})$ vseh deliteljev popolnega števila. Primer: Za 6 dobimo $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = ?$.
5. Določi največji skupni delitelj števil $n! + 1$ in $(n+1)!$.
6. Dokaži, da je vsak trapez včrtan krogu enakokrak.
7. Za katera naravna števila n je $n^2 + 1981$ popoln kvadrat?
8. Pokaži: če je $2^n - 1$ praštevilo, je $2^{n-1}(2^n - 1)$ popolno število.
9. Imej podano premico in dve različni točki A , B na isti strani premice. Poišči točko C na premici, da bo vsota razdalj $AC + CB$ najkrajša.
10. Fibonaccijeva števila so definirana z naslednjo zvezo: $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Torej je vsako naslednje število vsota prejšnjih dveh $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$. Oznaka F_n označuje n -to Fibonaccijevo število. Torej je $F_2 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$. Dokaži: $F_{n-1} \cdot F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$; $n \geq 2$.
11. Polmer trikotniku včrtanega kroga je 4, dotikališče razdeli eno stranico na dva odseka dolžine 6 in 8. Določi dolžine vseh treh stranic trikotnika.
12. Dokaži: vsako liho praštevilo je razlika dveh kvadratov in to na en sam način.
13. Pokaži, da gre vsota $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$ čez vse meje.