

Odbirni del - 3.letnik

- (1) (2017) Dani sta točki A in B , ter krožnica $\mathcal{K}$ s premerom AB . Na daljici AB izberemo točko T različno od A in B . Pravokotnica na daljico AB skozi točko T naj seka krožnico $\mathcal{K}$ v točkah M in N . Označimo $|AT| = x$, $|TB| = y$ in $|TN| = z$. Izračunaj vrednost izraza

$$\frac{\log_y z + \log_x z}{\log_x z \cdot \log_y z} =$$

- (2) (2017) Naj bo $\sin \alpha + \sin \beta = 1$ in $\cos \alpha + \cos \beta = -\sqrt{3}$.
(a) Izračunaj vrednost izraza $\cos(\alpha - \beta)$.
(b) Poišči vse pare števil α in β , ki ustrezajo danima enačbama.
- (3) (2001) Reši enačbo $(2^x - 4)^3 + (4^x - 2)^3 = (4^x + 2^x - 6)^3$.
- (4) (2001) V trikotniku s koti α , β in γ sta α in β ostra kota, ter velja $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$. Dokaži, da je γ pravi kot.
- (5) (2005) Poišči vsa pozitivna realna števila x , ki zadoščajo enačbi $x^{x^{\sqrt[3]{x}}} = (x^{\sqrt[3]{x}})^x$.
- (6) (2005) Za koliko naravnih števil n je vrednost izraza $n^3 - 14n^2 + 64n - 93$ praštevilo?
- (7) (2006) Mateja je eno za drugim zapisala sto naravnih števil. O njih je povedala: Na petdesetem mestu je število 50, na stotem mestu pa število 100. Če seštejemo katerakoli tri števila, ki si sledijo eno za drugim, dobimo vsoto 2006. Katero število je na prvem mestu? Katero pa na devetindevetdesetem?
- (8) (2006) Poišči vse pare naravnih števil m in n , da je
- $$3m - 0 + 1 \cdot 2 \cdots m = n^3.$$
- (9) (2006) V trapezu $ABCD$ z osnovnicama AB in CD velja $|AB| > |CD|$ ter $\angle ADC = 90^\circ$. Naj bo E pravokotna projekcija oglišča A na premico BC . Dokaži, da se premici AC in DE sekata pravokotno natanko tedaj, ko je trikotnik ABC enakokrak z vrhom B .