

Odbirni del - 4.letnik

- (1) (2017) Najmanj kolikokrat moramo hkrati vreči dve pošteni igralni kocki, da bo verjetnost, da bomo vsaj enkrat na obeh kockah vrgli enako število pik, večja od $\frac{1}{2}$.

- (2) (2017) Dani je zaporednje $a_1, a_2, a_3, \dots$ z začetnima členoma $a_1 = 4$ in $a_2 = 16$, za katerega je $\log_2(\log_2 a_1), \log_2(\log_2 a_2), \log_2(\log_2 a_3), \dots$ aritmetično zaporedje. Dokaži, da je

$$\log_2(\log_2(4a_1a_2\dots a_n)) = n + 1$$

za vsa naravna števila n . (Namig: indukcija)

- (3) (2006) Poišči vsa realna števila x , za katera je

$$(x^2 - 7x + 11)^{x^2 + 5x - 6} = 1.$$

- (4) (2006) Naj bo ABC ostrokotni trikotnik, $\mathcal{K}$ krožnica s premerom AB , E in F presečišči krožnice s stranizama AC in BC , P pa presečišče tangent na krožnico $\mathcal{K}$, v točkah E in F . Izračunaj razmerje med polmeroma očrtanih krožnic trikotnikov ABC in EFP .

- (5) (2006) Matija je v vrsto zapisal vsa naravna števila od 1 do 2006. Nato je v drugo vrsto pod vsako število zapisal vsoto njegovih števk. Koliko je vsota števil v drugi vrsti?

- (6) (2005) Poišči vse funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki zadoščajo enačbi

$$yf(x) + xf(y) = (x + y)f(x + y).$$

- (7) (2005) Naj bo ABC enakokraki ostrokotni trikotnik z vrhom C . Nosilka višine iz A seka stranico BC v točki D , očrtano krožnico trikotnika ABC pa v točkah A in E . Premica BE seka krožnico s premerom BC v točkah B in F . Dokaži $|AD| = |BF|$.

- (8) (2004) Poišči vsa praštevila p , za katera sta tudi $p + 28$ in $p + 56$ praštevili.

- (9) (2004) Za katera naravna števila n lahko najdemo n zaporednih celih števil z vsoto n ?