Uvod

Navadne diferencialne enačbe so enačbe, v katerih poleg neodvisne spremenljivke, ki jo bomo običajno označevali s x (ali pa s t, če bomo imeli v mislih čas), nastopa tudi neznana funkcija te spremenljivke, y, in njeni odvodi. Splošna diferencialna enačba je tako oblike

$$F(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}),$$

kjer je F neka funkcija $n+2$ spremenljivk. Na primer

$$y' = y + \sin x$$

ali

$$y \sin y'' + yx^2 = 0.$$

Najvišja stopnja odvoda, ki v diferencialni enačbi nastopa je *red diferencialne enačbe.* Prva zgornja enačba ima red 1, druga pa je drugega reda.

Rešitev diferencialne enačbe je vsaka funkcija $y(x)$, ki zadošča dani enačbi. Funkcija $y(x) = e^{kx}$ je rešitev diferencialne enačbe

$$y' = ky,$$

ker je

$$(e^{kx})' = ke^{kx}.$$

Začetna naloga je diferencialna enačba, skupaj z *začetnim pogojem.* Začetni pogoj v primeru diferencialnih enačb prvega reda pomeni, da predpišemo vrednost funkcije v neki točki, v primeru diferencialne enačbi n-tega reda pa predpišemo poleg vrednosti v neki točki še vse odvode v tej točki, vse do $(n-1)$-ga odvoda. Funkcija $y(x) = e^{kx}$ je torej rešitev začetne naloge

$$y' = ky, \quad y(0) = 1,$$

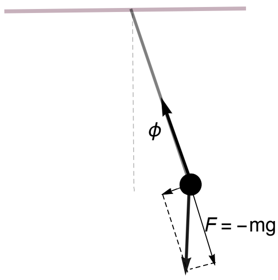
medtem ko je $y(x) = 7e^{kx}$ rešitev začetne naloge

$$y' = ky, \quad y(0) = 7.$$

Diferencialne enačbe ločimo na *linearne diferencialne enačbe*, to so enačbe oblike

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = g(x),$$

in nelinearne (vse ostale), to so take, kjer neznana funkcija ali njeni odvodi nastopajo nelinearno. Linearne diferencialne enačbe so običajno lažje obvladljive. Poglejmo si primer nihala na vrvici.



Newtonov zakon nam da

$$ml\phi'' = -mg\sin\phi$$

oziroma

$$\phi'' + \frac{g}{l}\sin\phi = 0.$$

Ta enačba je nelinearna, ker funkcija ϕ nastopa kot argument funkcije sin. Te enačbe eksplicitno ne znamo rešiti. Ker velja

$$\sin\phi \sim \phi,$$

za majhne kote ($\lim_{\phi\to 0}\frac{\sin\phi}{\phi} = 1$), enačbo lineariziramo, in dobimo linearno diferencialno enačbo

$$\phi'' + \frac{g}{l}\phi = 0,$$

katere rešitev je vsaka funkcija oblike $\phi(t) = a\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + b\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$.

Poleg navadnih diferencialnih enačb obravnavamo tudi sisteme diferencialnih enačb. Kot primer si poglejmo Lotka-Volterrov sistem

$$x' = \alpha x - \beta xy$$
$$y' = -\gamma y + \delta xy,$$

s katerim modeliramo dinamiko dveh populacij, plena (x) in plenilca (y). V tem primeru torej iščemo dve funkciji $x(t)$ in $y(t)$, ki rešita ta sistem (neodvisna spremenljivka je sedaj čas t).. Ta sistem je nelinearen, ker imamo v enačbah produkt xy.

Diferencialne enačbe prvega reda

Splošna diferencialna enačba prvega reda je oblike

$$y' = F(x, y),$$

kjer je F funkcija dveh spremenljivk. Začetna naloga za tako diferencialno enačbo je dodatni pogoj $y(x_0) = y_0$, kjer mora točka (x_0, y_0) biti iz definicijskega območja funkcije F. Brez dokaza navedimo osnovni izrek o obstoju rešitev

Izrek. *Naj bo $F(x, y)$ zvezno odvedljiva po spremenljivki y in zvezna v spremenljivki x in naj bo (x_0, y_0) poljubna točka iz definicijskega območja. Potem obstaja $\epsilon > 0$ in ena sama funkcija $y(x)$, definirana na $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, ki reši začetno nalogo*

$$y' = F(x, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

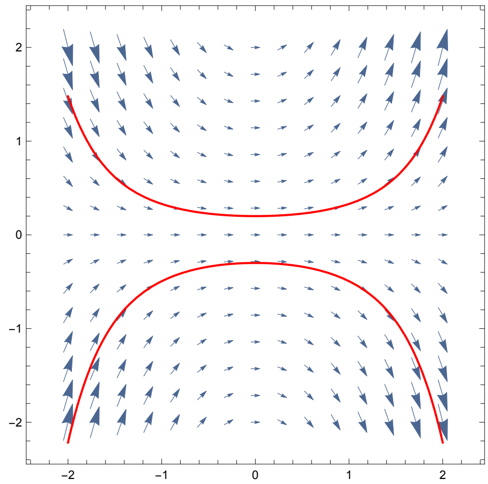
Polje smeri

Splošna diferencialna enačba prvega reda je oblije $y' = F(x, y)$, kjer je F neka funkcija dveh spremenljivk. Če je $y(x)$ rešitev te enačbe, ki gre skozi neko dano točko (x_0, y_0) to pomeni, da mora veljati $y'(x_0) = F(x_0, y_0)$, kar pomeni, da ima tangenta na graf funkcije $y(x)$ v točki (x_0, y_0) smerni koeficient enak $k = F(x_0, y_0)$. Če torej v vsaki točki (x_0, y_0) ravnine xy narišemo delčke vektorjev, ki kažejo v smeri $(1, F(x_0, y_0))$, (temi rečemo polje smeri), mora graf funkcije, ki reši to enačbo, v vsaki točki biti vzporeden tem vektorjem. Ponazorimo to s primerom.

Primer. Poglejmo si diferencialno enačbo

$$y' = xy.$$

Polje smeri dobimo tako, da v vsaki točki (x, y) narišemo delček vektorja, ki kaže v smeri $(1, xy)$. V točki $(1/2, 1/2,)$ mora tako, na primer, vektor kazati v smeri $(1, 1/4)$.



Polje smeri za enačbo $y' = xy$ skupaj z dvema rešitvama.

Osnovni izrek o obstoju rešitev nam geometrijski pove, da če je funkcija $F(x, y)$ (in s tem polje smeri) dovolj lepa, torej zvezna in ozvezno odvedljiva po drugi spremenljki, lahko iz vsake točke vsaj nekaj časa rišemo graf, ki bo sledil polju smeri.

Enačbe z ločljivimi spremenljivkami

Najpreprostejša diferencialna enačba prvega reda je enačba oblike

$$y' = f(x).$$

Rešitev te enačbe je vsak nedoločeni integral $y(x) = \int f(t)\, dt$. Vsako začeto nalogo $y(x_0) = y_0$ rešimo s pravilno izbiro integracijske konstante.

Primer. Poiščimo splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

in tisto rešitev, ki zadošča začetnemu pogoju $y(0) = 1$. Enačbo preprosto rešimo z integriranjem

$$y(x) = \int \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctan x + C.$$

V splošni rešitvi imamo torej parameter C, ki ga lahko poljubno izberemo. Če imamo začetni pogoj $y(0) = 1$, mora veljati $C = 1$. Rešitev začetne naloge je zato

$$y(x) = \arctan x + 1.$$

Diferencialne enačbe z ločljivimi spremenljivkami so enačbe oblike

$$y' = f(y)g(x).$$

Postopek reševanja je naslednji

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(y)g(x)\\ \frac{dy}{f(y)} &= g(x)\,dx\\ \int \frac{dy}{f(y)} &= \int g(x)\,dx + C.\end{aligned}$$

Če označimo $H(y) = \int \frac{dy}{f(y)}$ in $G(x) = \int g(x)\,dt$, tako dobimo implicitno obliko rešitve v obliki

$$H(y) = G(x) + C,$$

ki jo lahko nadalje poskusimo napisati v eksplicitni obliki

$$y(x) = H^{-1}(G(x) + C).$$

Preverimo, da je to res rešitev naše enačbe

$$y'(x) = (H^{-1})'(G(x)+C)G'(x)) = \frac{1}{H'(H^{-1}(G(x)+C))}G'(x) = f(y)g(x).$$

Primer. Enačba $y' = ky$ ima ločljive spremenljivke. Rešitev je

$$\begin{aligned}&\frac{dy}{dx} = ky \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = kdx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int kdx\\ &\Leftrightarrow \log|y| = kx + C \Leftrightarrow |y| = e^C e^{kx} \Leftrightarrow y = De^{kx}.\end{aligned}$$

Če rešujemo začetno nalogo $y(0) = y_0$, je rešitev $y(t) = y_0 e^{kx}$.

Primer. Enačba $xy' - 1 = y^2$ ima ločljive spremenljivke, saj jo lahko zapišemo v obliki

$$y' = \frac{y^2+1}{x}.$$

Rešitev je

$$\begin{aligned}&\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+1}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2+1} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2+1} = \int \frac{dx}{x}\\ &\Leftrightarrow \arctan y = \log|x| + C \Leftrightarrow y = \tan(\log|y| + C)\end{aligned}$$

Logistična diferencialna enačba

Najpreprostejši model za rast populacije je model naravne rasti

$$\frac{dy}{dt} = ry.$$

V tem modelu predpostavimo, da je narastek populacije premo sorazmeren z nekim faktorjem r številu osebkov te populacije. Ta faktor je lahko tudi negativen, v primeru, ko se populacija zmanjšuje zaradi, na primer, pomanjkanja hrane. Kot smo videli zgoraj, je rešitev te enačbe, pri začetnem pogoju $y(0) = y_0$, eksponentna funkcija

$$y(t) = y_0 e^{rt}.$$

Najbolj očitna pomanjkljivost tega modela je zagotovo, da ni vzdržen na dolgi rok, saj predpostavlja, da populacija raste čez vse meje. V realnosti se s povečevanjem populacije hkrati zmanjšuje količina virov, ki jih populacija potrebuje za preživetje, zato je pričakovati, da je faktor r, ki nam določa naravni prirastek, odvisen od samega števila osebkov. Bolj realni populacijski modeli so zato oblike

$$\frac{dy}{dt} = h(y)y,$$

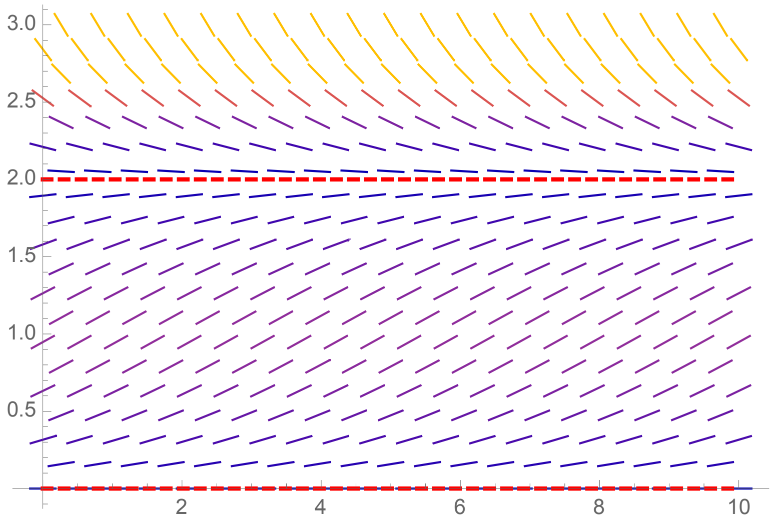
kjer je h neka primerna funkcija. Če je $h(y) = r$, dobimo model naravne rasti. Pri *logističnem modelu rasti*, ki ga imenujemo tudi *Verhulstov model*, vzamemo

$$h(y) = r - ay,$$

kar pomeni, da se sam koeficient, ki nam določa prirastek, linearno zmanjšuje s številom osebkov v populaciji. Prirastek je enak 0, ko je število osebkov enako *nosilni kapaciteti* $K := r/a$. *Logistično diferencialno enačbo* običajno pišemo v obliki

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y.$$

Poglejmo si polje smeri.



Polje smeri za enačbo $y' = 0.5y(1 - y/2)$.

Ker je pri $y = 0$ in $y = K$ desna stran logistične diferencialne enačbe anaka 0, je tam polje smeri vodoravno in funkciji $y(t) = 0$ in $y(t) = K$ sta rešitvi logistične diferencialne enačbe. Ti dve rešitvi imenujemo stacionarni rešitvi. Rešitev $y(t) = 0$ je *nestabilna*, saj že majhna sprememba v začetnem pogoju povzroči, da se rešitev odmakne od te stacionarne rešitve, rešitev $y(t) = K$ pa je *stabilna* stacionarna rešitev.

Logistična diferencialna enačba je enačba z ločljivimi spremenljivkami in jo lahko rešimo simbolno. Poglejmo si splošno rešitev.

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1-\frac{y}{K}\right)y \Leftrightarrow \frac{dy}{\left(1-\frac{y}{K}\right)y} = rdt \Leftrightarrow \int \frac{dy}{\left(1-\frac{y}{K}\right)y} = rt + D.$$

Integral zadnji ekvivalenci izračunamo s pomočjo razcepa na parcialne ulomke:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{y}{K}\right)y} = \frac{1}{y} + \frac{1}{K}\frac{1}{1-\frac{y}{K}}.$$

Zato je

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{\left(1-\frac{y}{K}\right)y} &= \int \frac{dy}{y} + \frac{1}{K}\int \frac{dy}{1-\frac{y}{K}} \\ &= \log|y| - \log\left|1-\frac{y}{K}\right| + E \\ &= \log\left|\frac{Ky}{K-y}\right| + E.\end{aligned}$$

Torej

$$\log\left|\frac{Ky}{K-y}\right| + E = rt + D \Leftrightarrow \frac{y}{K-y} = Ce^{rt},$$

kjer je C poljubna realna konstanta. Če imamo začetni pogoj $y(0) = y_0$, velja

$$\frac{y_0}{K-y_0} = C \Rightarrow \frac{y}{K-y} = \frac{y_0}{K-y_0}e^{rt},$$

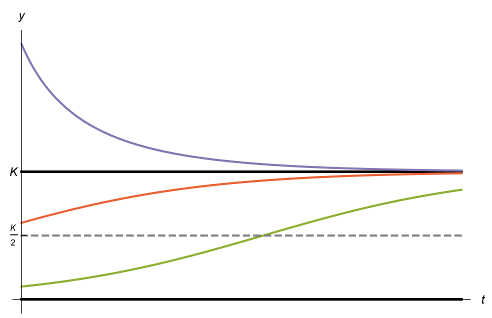
oziroma

$$y = \frac{Ky_0}{y_0 + (K-y_0)e^{-rt}}.$$

Če je $y_0 > 0$ v limiti dobimo

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Ky_0}{y_0 + (K-y_0)e^{-rt}} = K,$$

kar pomeni, da se populacija, ne glede na začetno število osebkov, približuje nosilni kapaciteti K.



Logistična rast pri različnih začetnih pogojih

Primer. Predpostavimo, da število rib v morju narašča logistično z enačbo

$$\frac{dy}{dt} = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right),$$

če rib ne lovimo. Če predpostavimo, da ljudje vlagajo enako napora v ribarjenje, neodvisno od količine rib, potem je število ulovljenih rib sorazmerno številu rib, ki so trenutno v morju. Tako za število rib v morju dobimo diferencialno enačbo

$$\frac{dy}{dt} = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right) - qy = (r-q)y\left(1 - \frac{y}{(1-q/r)K}\right).$$

Število rib se na daljši rok približuje vrednosti $(1 - q/r)K$, zato se število ujetih rib na daljši rok približuje vrednosti $q(1 - q/r)K$. Na daljši rok bomo torej uspeli loviti največ rib, če bo q izbran tako, da bo vrednost funkcije $g(q) = q(1 - q/r)K$ maksimalna, torej

$$g'(q) = 1 - 2q/r = 0 \Leftrightarrow q_{\max} = r/2.$$

Primer. Logistično enačbo lahko uporabimo pri kemijskih reakcijah $A+B \to P$ drugega reda, kjer ima vsak od reaktantov red 1. Če je $[P]$ koncentracija produkta P, sta $[A] = [A]_0 - [P]$ in $[B] = [B]_0 - [P]$ zaporedoma koncentraciji reaktantov A in B ($[A]_0$ in $[B]_0$ sta začetni koncentraciji reaktantov), in imamo diferencialno enačbo

$$\frac{d[P]}{dt} = k([A]_0 - [P])([B]_0 - [P]).$$

Predpostavimo, da je $[A]_0 > [B_0]$ in označimo $y = [A]_0 - [P]$. Potem je

$$\frac{dy}{dt} = ky([A]_0 - [B]_0 - y) = k([A]_0 - [B]_0)y\left(1 - \frac{y}{[A]_0 - [B]_0}\right).$$

Dobili smo logistično diferencialno enačbo, in če upoštevamo začetni pogoj $y(0) = y_0 = [A]_0$, dobimo rešitev

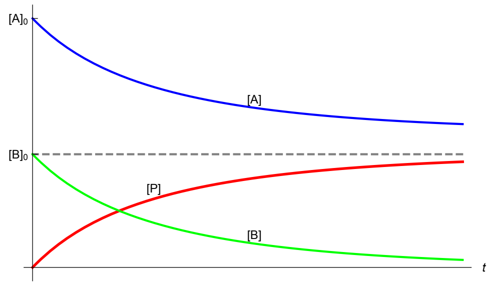
$$y = \frac{[A]_0([A]_0 - [B]_0)}{[A]_0 + [B]_0 e^{-k([A]_0 - [B]_0)t}}.$$

Če upoštevamo $[P] = [A]_0 - y$, dobimo rešitev

$$[P] = \frac{[A]_0[B]_0\left(e^{k([A]_0 - [B]_0)t} - 1\right)}{[A]_0 e^{k([A]_0 - [B]_0)t} - [B]_0},$$

ki nam da koncentracijo produkta reakcije v odvisnosti od časa. V limito dobimo pričakovan rezultat

$$\lim_{t\to\infty}[P] = [B]_0.$$

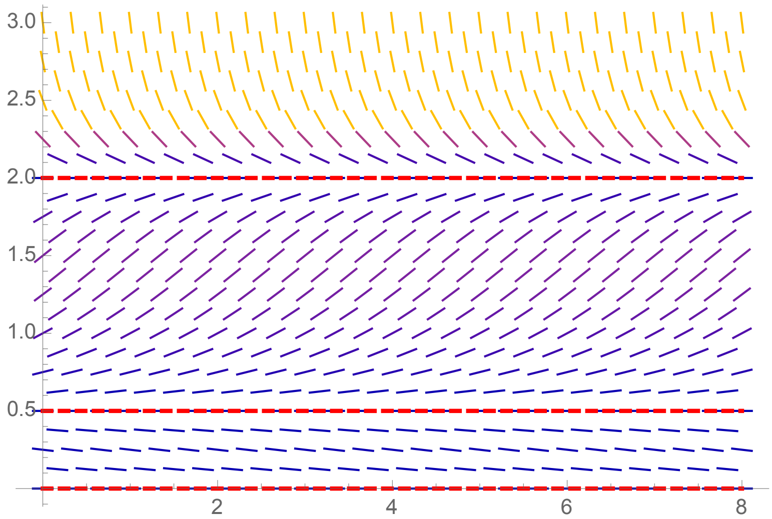


Koncentracije v primeru $A_0 = 2.2B_0$

Poglejmo si še posplošitev modela logistične rasti na logistično rast s pragom. V tem modelu predpostavimo, da populacija izumre, če je število osebkov te populacije pod nekim kritičnim pragom, če pa je število osebkov nad tem pragom, pa se populacija na dolgi rok približuje nosilni kapaciteti. Najbolj preprost tak model je podan z diferencialno enačbo

$$y' = -ry\left(1 - \frac{y}{K}\right)\left(1 - \frac{y}{T}\right),$$

kjer je $0 < T < K$. V tem primeru polje smeri izgleda kot



Polje smeri za enačbo $y' = -0.6y(1 - y/2)(1 - 2y)$.

Dobimo tri stacionarne rešitve, $y = 0$ (stabilna), $y = T$ (nestabilna) in $y = K$ (stabilna).

Diferencialno enačbo je v tem primeru nekoliko težje eksplicitno rešiti, čeprav ima ločljive spremenljivke, lahko pa iz polja smeri precej dobro ugotovimo obnašanje rešitve.

Sistemi diferencialnih enačb prvega reda

Splošni *sistem diferencialnih enačb* prvega reda je oblike

$$
\begin{aligned}
y_1' &= F_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\
y_2' &= F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\
&\dots \\
y_n' &= F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n),
\end{aligned} \tag{1}
$$

kjer so $F_1, F_2, \dots, F_n$ neke funkcije $n+1$ spremenljivk. Rešitve takega sistema so funkcije $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, ki zadostijo sistemu. Začetni pogoj za tak sistem je oblike $y_1(x_0) = y^1, y_2(t_0) = y^2, \dots, y_n(t_0) = y^n$, kjer so $y^1, y^2, \dots, y^n \in \mathbb{R}$.

Izrek (Picardov eksistenčni izrek). *Naj bodo funkcije $F_k(t)$, $k = 1, \dots, n$ v sistemu* (1) *zvezne in svezno parcialno odvedljive po vseh spremenljivkah y_j, $j = 1, 2, \dots, n$, v okolici neke točke $(x_o, y^1, y^2, \dots, y^n)$. Potem ima sistem* (1) *enolično rešitev $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, ki zadošča začetnemu pogoju $y_1(x_0) = y^1, y_2(x_0) = y^2, \dots, y_n(x_0) = y^n$, in so vse funkcije definirane vsaj na intervalu $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, za nek $\epsilon > 0$.*

Sistem je *linearen*, če je oblike

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + g_1(x) \\
y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + g_2(x) \\
&\dots \\
y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + g_n(x),
\end{aligned}
$$

linearen homogen, če velja še $g_1(x) = g_2(x) = \ldots = g_n(x) = 0$, in *linearen s konstantnimi koeficienti*, če so vse funkcije a_{ij} konstantne, torej dejansko neodvisne od x.

Opomba. Iz Picardovega eksistenčnega izreka sledi eksistenčni izrek za navadne diferencialne enačbe poljubnega reda. Diferencialne enačba n-tega reda je oblike

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \tag{2}$$

začetna naloga za tako diferencialno enačbo pa je

$$y(x_0) = y^0, y'(x_0) = y^1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y^{n-1}. \tag{3}$$

Splošno diferencialno enačbo n-tega reda lahko preprosto preoblikujemo v sistem n diferencialnih enačb prvega reda:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\cdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Iz Picardovega eksistenčnega izreka zato sledi, da ima vsaka diferencialna enačba n-tega reda, oblike (2) pri vsakem začetnem pogoju (3) enolično rešitev, ki obstaja na nekem majhnem intervalu okrog točke x_0, če je le F zvezna in zvezno parcialno odvedljiva po zadnjih n spremenljivkah.

Sistem linearnih diferencialnih enačb

V nadaljevanju bomo namesto neodvisne spremenljivke x pisali t, odvisne funkcije y_k pa bomo zamenjali z x_k. Namesti s črtico, bomo odvod po t označevbali s piko.

Sistem navadnih linearnih diferencialnih enačb zapišemo kot

$$\dot{x_k}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t) x_j(t) + f_k(t); \quad k = 1, 2, ..., n,$$

v matrični obliki pa kot

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{f}(t),$$

kjer označimo

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \ \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

Pri tem so funkcije a_{kj} in f_k definirane (in običajno zvezne) na nekem intervalu $I = [a, b]$. Rešitev sistema je vsaka odvedljiva vektorska funkcija

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},$$

ki zadošča zgornjemu sistemu. Vektorska funkcija $\vec{x}(t)$ reši začetno nalogo pri začetnem pogoju $x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \ldots, x_n(t_0) = x_n^0$, če reši sistem diferencialnih enačb v okolici točke t_0 in hkrati zadosti začetnemu pogoju. Eksistenčni izrek nam v tem primeru da rešitev, ki je difinirana na celotnem intrevalu, kjer so vse funkcije definirane in zvezne.

Izrek (Eksistenčni izrek). *Naj bodo $a_{kj}(t)$, $k, j = 1, \ldots, n$ in $f_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$ zvezne funkcije na intervalu $[a, b]$ in $t_0 \in [a, b]$. Sistem navadnih linearnih diferencialnih enačb*

$$\dot{x_k}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t) x_j(t) + f_k(t); \quad k = 1, 2, ..., n,$$

je pri vsakem začetnem pogoju

$$x_k(t_0) = x_k^0; \quad k = 1, 2, ..., n,$$

enolično rešljiv in rešitev obstaja na celem intervalu $[a, b]$.

V naslednjih nekaj razdelkih bomo pokazali, kako v primeru, ko matrika A v zgornjem sistemu ni odvisna od t, reševanje sistema prevedemo na povsem algebraičen problem lastnih (in korenskih) vektorjev ter lastnih vrednosti matrike A.

Homogeni sistemi linearnih enačb

Poglejmo si homogen sistem

$$\dot{x_k}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t) x_j(t)(t); \quad k = 1, 2, ..., n,$$

oziroma

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t) x(t), \tag{4}$$

kjer so koeficienti matrike A, a_{kj}, zvezne na intervalu $[a, b]$.

Trditev. *Rešitve homogenega sistema (4) tvorijo vektorski prostor.*

Dokaz. Če sta vektorski funkciji $\vec{x}(t)$ in $\vec{y}(t)$ rešitvi sistema, potem pri poljubnih konstantah $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ velja

$$A(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda A \vec{x} + \mu A \vec{y},$$

zato je $\vec{z} = \lambda \vec{x} + \mu \vec{y}$ tudi rešitev sistema. □

Predpostavimo sedaj, da so vektorske funkcije $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ rešitve sistema (4). Torej velja $\dot{\vec{x}}_k = A \vec{x}_k$ za vsak $k = 1, 2, ..., n$. Če sestavimo te rešitve v $n \times n$ matriko

$$X(t) = [\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \cdots, \vec{x}_n(t)],$$

je matrika X matrična rešitev matrične enačbe

$$\dot{X} = AX,$$

saj velja

$$AX = [A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \cdots, A\vec{x}_n] = [\dot{\vec{x}}_1, \dot{\vec{x}}_2, \cdots, \dot{\vec{x}}_n] = \dot{X}.$$

Vektorske funkcije $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ so linearno odvisne, če obstajajo konstante $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, ne vse enake 0, da velja

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \ldots \lambda_n \vec{x}_n = 0.$$

Če sistem vektorskih funkcij ni odvisen, rečemo, da je neodvisen.

TRDITEV. *Naj bodo vektorske funkcije $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ rešitve sistema (4) in $X = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n]$. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

(i) Matrika $X(t)$ je singularna za vsak $t \in [a, b]$.
(ii) Matrika $X(t_0)$ je singularna za nek $t_0 \in [a, b]$.
(iii) Vektorske funkcije $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ so linearno odvisne.

DOKAZ. Implikaciji (i) $\Longrightarrow$ (ii) in (iii) $\Longrightarrow$ (i) sta očitni. Pokažimo torej (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Naj bo matrika $X(t_0)$ singularna. Tedaj obstajajo konstante $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n$, ne vse enake 0, da velja

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{x}_k(t_0) = 0.$$

Vzemimo vektorsko funkcijo

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{x}_k.$$

Ker rešitve sistema $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ tvorijo vektorski prostor, je $\vec{x}$ rešitev sistema pri začetnem pogoju $\vec{x}(t_0) = 0$. Iz Eksistenčnega izreka sledi, da velja

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{x}_k(t) = 0$$

za vsak t, saj imamo enolično rešitev začetne naloge. Vektorske funkcije so torej linearno odvisne. □

IZREK. *Vektorski prostor rešitev sistema (4) je n-razsežen.*

DOKAZ. Naj bo t_0 poljubna točka iz $[a, b]$ in naj bo za vsak $k = 1, 2, \ldots, n$ vektorska funkcije $\vec{x}_k$ (tista) rešitev sistema (4), ki zadošča začetnemu pogoju

$$\vec{x}_k(t_0) = e_k,$$

kjer je e_k enotski vektor, ki ima na k-tem mestu 1. Matrika $X(t) = [\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \ldots, \vec{x}_n(t)]$ je nesingularna v točki t_0. Naj bo sedaj $\vec{x}$ poljubna rešitev sistema (4). Potem lahko najdemo konstante $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, da velja

$$\vec{x}(t_0) = \lambda_1 \vec{x}_1(t_0) + \lambda_2 \vec{x}_2(t_0) + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n(t_0).$$

Ker je vektorska funkcija

$$\lambda_1 \vec{x}_1(t) + \lambda_2 \vec{x}_2(t) + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n(t)$$

rešitev sistema pri istem začetnem pogoju pri t_0 kot $\vec{x}(t)$, je zaradi enoličnosti

$$\vec{x}(t) = \lambda_1 \vec{x}_1(t) + \lambda_2 \vec{x}_2(t) + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n(t)$$

za vsak t. Vsako rešitev torej lahko napišemo kot linearno kombinacijo linearno neodvisnih rešitev $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$. $\square$

Definicija. Fundamentalna matrika v točki t_0 je matrična funkcija $t \to \Psi(t, t_0)$, kjer je

$$\Psi(t, t_0) = [\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t) \cdots \vec{x}_n(t)]$$

in kjer so $\vec{x}_k$ rešitve sistema (4), ki zadoščajo začetnim pogojem

$$\vec{x}_k(t_0) = e_k; \ k = 1, 2, ..., n,$$

kjer je e_k k-ti enotski vektor. Fundamentalna matrika je torej rešitev matrične diferencialne enačbe $\dot{X} = AX$, ki zadošča začetnemu pogoju

$$X(t_0) = \Psi(t_0, t_0) = I.$$

Izrek. *Vsako rešitev $\vec{x}$ sistema (4) lahko zapišemo kot*

$$\vec{x}(t) = \Psi(t, t_0)\vec{x}(t_0).$$

Vsako rešitev matrične diferencialne enačbe $\dot{X} = AX$ lahko zapišemo kot

$$X(t) = \Psi(t, t_0)X(t_0).$$

Dokaz. Splošno rešitev sistema lahko zapišemo kot

$$\vec{x}(t) = \Psi(t, t_0)\vec{c},$$

ker tvorijo stolpci matrike $\Psi(t, t_0)$ bazo vektorskega prostora. Ker je

$$\vec{x}(t_0) = \Psi(t_0, t_0)\vec{c} = \vec{c},$$

dobimo

$$\vec{x}(t) = \Psi(t, t_0)\vec{x}(t_0).$$

Izjava o rešitvi matrične enačbe se dokaže povsem analogno. $\square$

Ker velja $X(t) = \Psi(t, t_0)X(t_0)$, je seveda $\Psi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$, dobimo preprosto posledico, ki jo bomo potrebovali v nadaljevanju.

Posledica. *Če je X nesingularna rešitev matrične diferencialne enačbe $\dot{X} = AX$, potem velja*

$$\Psi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0).$$

Homogeni sistemi s konstantnimi koeficienti

V primeru, ko imamo opravka s homogenim sistemom linearnih enačb prvega reda s konstantnimi koeficienti, se reševanje prevede na iskanje lastnih vrednosti in lastnih (ali korenskih) vektorjev matrike A.

Naj bo torej

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t)$$

sistem enačb, pri čemer je A $n \times n$ realna matrika. Naj bo $\vec{v}$ lastni vektor matrike A pri lastni vrednosti λ. Vidimo, da je

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$$

rešitev enačbe, saj velja

$$\dot{\vec{x}}(t) = \lambda e^{\lambda t}\vec{v} = e^{\lambda t}A\vec{v} = A\vec{x}(t).$$

Če ima matrika A n linearno neodvisnih realnih lastnih vektorjev $\vec{v}_1$,$\vec{v}_2$, …,$\vec{v}_n$ s pripadajočimi (ne nujno različnimi si) realnimi lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, bomo s tem dobili n linearno neodvisnih realnih rešitev $\vec{x}_k = e^{\lambda_k}\vec{v}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Da so te rešitve dejansko linearno neodvisne, vidimo s tem, da je matrika rešitev $X = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]$ v točki $t = 0$ enaka $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n]$.

Primer. Poiščimo splošno rešitev sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= 4y_1 + y_2 \end{aligned}$$

in poiščimo tisto rešitev, ki zadošča začetnemu pogoju $y_1(0) = 2$, $y_2(t) = 2$. Poiščimo lastne vrednosti matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0,$$

torej imamo dve lastni vrednosti, $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_2 = 3$. Poiščimo oba lastna vektorja. Pri λ_1 imamo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ torej } 2v_1 + v_2 = 0.$$

Za vektor $\vec{v}_1$ torej lahko vzamemo

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Podobno za $\lambda_2 = 3$ dobimo

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ torej } -2v_1 + v_2 = 0.$$

Za vektor $\vec{v}_2$ torej lahko vzamemo

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Splošna rešitev sistema je torej

$$\vec{y}(x) = Ae^{-x} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + Be^{3x} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

oziroma

$$\begin{aligned} y_1(x) &= Ae^{-x} + Be^{3x}, \\ y_2(x) &= -2Ae^{-x} + 2Be^{3x}. \end{aligned}$$

Če želimo zadostiti začetnemu pogoju $y_1(0) = y_2(0) = 2$, potem moramo konstanti A in B določiti tako, da bo veljalo.

$$\begin{aligned} 2 &= A + B, \\ 2 &= -2A + 2B, \end{aligned}$$

torej $A = 1/2$ in $B = 3/2$. Rešitev začetne naloge je zato

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{e^{-x} + 3e^{3x}}{2}, \\ y_2(x) &= -e^{-x} + 3e^{3x}. \end{aligned}$$

Nastopita lahko dve težavi. Lahko da vse lastne vrednosti matrike A niso realne, čeprav je matrika sama realna, ali pa, da ne moremo najti n linearno neodvisnih lastnih vektorjev, saj je lahko algebraična večkratnost neke lastne vrednosti večja od geometrične večkratnosti.

Kompleksne lastne vrednosti.

Poglejmo, kako postopamo, če neka lastna vrednost $\lambda = \mu + i\omega$ in s tem pripadajoči lastni vektor $\vec{v} = \vec{u} + i\vec{w}$ nista realna. Ena od možnosti je, da za rešitev vseeno vzamemo funkcijo $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$, kjer je

$$e^{\lambda t} = e^{\mu t} \left(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)\right).$$

Taka rešitev potem seveda ni realna, vendar s primerno izbiro konstant, ki bodo v tem primeru lahko kompleksne, vseeno rešimo vsako začetno nalogo. Lahko pa preprosto za rešitvi vzamemo realni in imaginarni del kompleksne vektorske funkcije $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$ (spomnimo se, da je tudi $\bar{\lambda}$ lastna vrednost z lastnim vektorjem $\overline{\vec{v}}$). Tako dobimo dve realni rešitvi

$$\vec{x}_1 = e^{\mu t} \left(\cos(\omega t)\vec{u} - \sin(\omega t)\vec{w}\right)$$

in

$$\vec{x}_2 = e^{\mu t} \left(\sin(\omega t)\vec{u} + \cos(\omega t)\vec{w}\right).$$

Če torej predpostavimo, da ima matrika A n linearno neodvisnih lastnih vektorjev $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, bomo s tem dobili n linearno neodvisnih rešitev homogenega sistema. Preverimo samo, da so tudi v primeru, če so nekatere lastne vrednosti iz $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, te rešitve linearno neodvisne. Naj bodo $\lambda_1, \overline{\lambda}_1 \ldots, \lambda_k, \overline{\lambda}_k$ pari kompleksnih lastnih vrednosti in $\vec{v}_1, \overline{\vec{v}}_1 \ldots, \vec{v}_k, \overline{\vec{v}}_k$ pripadajoči lastni vektorji, ter $\lambda_{2k+1}, \ldots, \lambda_n$ preostale realne lastne vrednosti s pripadajočimi realnimi lastnimi vektorji $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$. Če pišemo $\lambda_j = \mu_j + i\omega_j$ in $\vec{v}_j = \vec{u}_k + i\vec{w}_j$, so potem rešitve

$$
\begin{aligned}
\vec{x}_1 &= e^{\mu_1 t}\left(\cos(\omega_1 t)\vec{u}_1 - \sin(\omega_1 t)\vec{w}_1\right)\\
\vec{x}_2 &= e^{\mu_1 t}\left(\sin(\omega_1 t)\vec{u}_1 + \cos(\omega_1 t)\vec{w}_1\right)\\
&\ldots\\
\vec{x}_{2k-1} &= e^{\mu_k t}\left(\cos(\omega_k t)\vec{u}_k - \sin(\omega_k t)\vec{w}_k\right)\\
\vec{x}_{2k} &= e^{\mu_k t}\left(\sin(\omega_k t)\vec{u}_k + \cos(\omega_k t)\vec{w}_k\right)\\
&\ldots\\
\vec{x}_{2k+1} &= e^{\lambda_{2k+1}}\vec{v}_{2k+1}\\
&\ldots\\
\vec{x}_n &= e^{\lambda_n}\vec{v}_n.
\end{aligned}
$$

Matrika rešitev $X = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n]$ je v točki $t = 0$ enaka

$$[\vec{u}_1, \vec{w}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{w}_k, \vec{v}_{2k+1}, \ldots, \vec{v}_n].$$

Ker je matrika

$$[\vec{v}_1, \overline{\vec{v}}_1, \ldots, \vec{v}_k, \overline{\vec{v}}_k, \vec{v}_{2k+1}, \ldots, \vec{v}_n]$$

nesingularna, je tudi matrika

$$[\vec{v}_1, \vec{w}_1, \ldots, \vec{v}_k, \vec{w}_k, \vec{v}_{2k+1}, \ldots, \vec{v}_n]$$

nesingularna, saj jo dobimo tako, da vsakemu drugemu stolpcu izmed prvih $2k$ stolpcev odštejemo prejšnji stolpec in nato delimo ustrezne stolpce z $-2i$. Če nato vsakemu lihemu stolpcu izmed prvih $2k$ stolpcev odštejemo i-krat naslednji sodi stolpec, dobimo matriko

$$[\vec{u}_1, \vec{w}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{w}_k, \vec{v}_{2k+1}, \ldots, \vec{v}_n].$$

S tem je tudi ta matrika nesingularna, zato so zgornje rešitve linearno neodvisne.

Primer. Poiščimo splošno rešitev sistema

$$
\begin{aligned}
y_1' &= 3y_1 - 2y_2\\
y_2' &= 4y_1 - y_2
\end{aligned}
$$

in tisto rešitev, ki zadošča začetnemu pogoju $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$. Poiščimo lastne vrednosti matrike

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0.$$

Torej imamo dve lastni vrednosti, $\lambda_1 = 1 + 2i$ in $\lambda_2 = 1 - 2i$. Poiščimo lastni vektor za lastno vrednost $1 + 2i$:

$$\begin{bmatrix} 2-2i & -2 \\ 4 & -2-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ torej } (2-2i)v_1 - 2v_2 = 0.$$

Za vektor v torej lahko vzamemo

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Splošna rešitev sistema je torej

$$\vec{y}(x) = e^x \left(A \left(\cos 2x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \sin 2x \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) + B \left(\cos 2x \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \sin 2x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right),$$

oziroma

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^x \left(A \cos 2x + B \sin 2x \right) \\ y_2(x) &= e^x \left(A \left(\cos 2x + \sin 2x \right) - B \left(\cos 2x - \sin 2x \right) \right). \end{aligned}$$

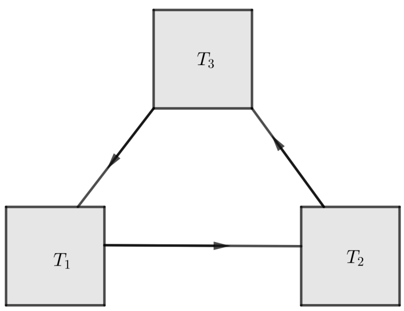
Da zadostimo začetnemu pogoju $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$, mora veljati

$$\begin{aligned} 0 &= A \\ 1 &= A - B, \end{aligned}$$

torej $A = 0$ in $B = -1$. Rešitev začetne naloge je

$$\begin{aligned} y_1(x) &= -e^x \sin 2x \\ y_2(x) &= e^t (\cos 2x - \sin 2x). \end{aligned}$$

Primer. Poglejmo si primer, ko se slanica pretaka v sistemu treh posod T_1, T_2 in T_3, vse z enakim volumnom V, ki so krožno povezane s cevmi.



Po vseh ceveh se slanica pretaka z enakim volumskim pretokom f l/min. Označimo z $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ količino soli v gramih (g), v vsaki od treh posod v času t. Za te tri količine, dobimo sistem diferencilanih enačb

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -f\frac{x_1}{V} + f\frac{x_3}{V}\\
\dot{x}_2 &= f\frac{x_1}{V} - f\frac{x_2}{V}\\
\dot{x}_3 &= f\frac{x_2}{V} - f\frac{x_3}{V}.
\end{aligned}$$

Za lažje računanje bomo predpostavili, da je $f/V = 1$ (to lahko preprosto dosežemo, če spremenimo časovno enote). V vektorski obliki je sistem potem $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Lastne vrednosti matrike A so ničle karakterističnega polinoma

$$\det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 1\\ 1 & -1-\lambda & 0\\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(1+\lambda)^3 + 1.$$

Če z ξ_1, ξ_2, ξ_3 označimo vse tretje korene enote, so lastne vrednosti torej

$$\lambda_1 = -1+\xi_1 = 0,\ \lambda_2 = -1+\xi_2 = -\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \lambda_3 = -1+\xi_3 = -\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

pripadajoči lastni vektorji pa

$$\vec{v}_1 = (1,1,1)^T,\ \vec{v}_2 = (1, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})^T,\ \vec{v}_3 = (1, -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})^T.$$

Namesto kompleksnih rešitev $e^{\lambda_j t}\vec{v}_j$, $j = 2,3$, lahko vzamemo za rešitve realni in imaginarni del $e^{\lambda_2} v_2$ in dobimo splošno rešitev

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} + be^{-3t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}t}{2}\begin{pmatrix} 1\\ -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\begin{pmatrix} 0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ +\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\right)$$
$$+ ce^{-3t/2}\left(\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\begin{pmatrix} 1\\ -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \cos\frac{\sqrt{3}t}{2}\begin{pmatrix} 0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ +\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\right).$$

Poglejmo si primer pri začetnem pogoju $\vec{x}(0) = (1,0,0)^T$. V tem primeru je

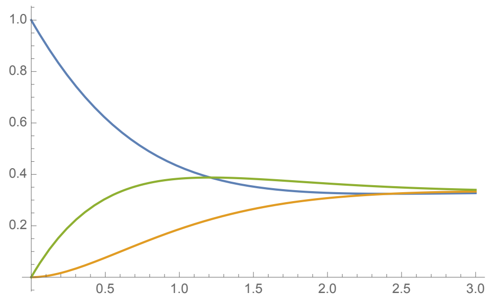
$$a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{2}{3}, \quad c = 0$$

in rešitev

$$x_1(t) = \frac{1}{3}\left(1 + 2e^{-3t/2}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)$$

$$x_3(t) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right).$$



Na sliki je z modro barvo označen graf spreminjanja količine soli v prvi posodi, z zeleno graf spreminjanja količine soli v drugi posodi in z oranžno graf spreminjanja količine snovi v tretji posodi.

Nediagonalizabilni sistemi.

Na primeru sistema dveh enačb si poglejmo, kako postopamo, če matrika sistema ni diagonalizabilna, kar pomeni, da je algebraična večkratnost kakšne lastne vrednosti večja, kot geometrična većkratnost. Bolj splošen primer si bomo ogledali kasneje.

Primer. Poiščimo splošno rešitev sistema

$$y_1' = 3y_1 + y_2$$
$$y_2' = -y_1 + y_2$$

in poiščimo tisto rešitev, ki zadošča začetnemu pogoju $y_1(0) = 1$, $y_2(t) = 2$. Poiščimo lastne vrednosti matrike

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0,$$

torej imamo eno samo lastno vrednost, $\lambda = 2$. Za to lastno vrednost je lastni vektor

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ torej } v_1 + v_1 = 0.$$

Za lastni vektor torej lahko vzamemo

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ena rešitev sistema je zato

$$\vec{y}_1 = e^{2x} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Drugo rešitev pa iščemo v obliki

$$xe^{\lambda x}\vec{v} + e^{\lambda x}\vec{w},$$

kjer je w zaenkrat pe neznan vektor. Da bo to rešitev, mora veljati

$$\begin{aligned} \left(xe^{\lambda x}\vec{v} + e^{\lambda x}\vec{w}\right)' &= e^{\lambda x}\vec{v} + x\lambda e^{\lambda z}\vec{v} + \lambda e^{\lambda x}\vec{w} \\ = A\left(xe^{\lambda x}\vec{v} + e^{\lambda x}\vec{w}\right) &= xe^{\lambda x}\lambda\vec{v} + e^{\lambda x}A\vec{w} \end{aligned}$$

in zato

$$\vec{v} = (A - \lambda I)\vec{w}.$$

Takemu vektorju $\vec{w}$ rečemo korenski vektor za dvojno lastno vrednost λ. Da dobimo $\vec{w}$ v našem primeru, rešimo sistem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ torej } w_1 + w_2 = 1.$$

Za rešitev lahko vzamemo, na primer, $\vec{w} = (1, 0)^T$. Dobili smo torej še eno rešitev sistema

$$\vec{y}_2 = xe^{2x} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + e^{2x} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Splošna rešitev sistema je torej

$$y = e^{2x} \left((A + Bx) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

oziroma

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{2x}(A + B + Bx), \\ y_2 &= -e^{2x}(A + Bx). \end{aligned}$$

Če želimo zadostiti začetnemu pogoju $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$, potem moramo konstanti A in B določiti tako, da bo veljalo.

$$\begin{aligned} 1 &= A + B, \\ 2 &= -A, \end{aligned}$$

torej $A = -2$ in $B = 3$. Rešitev začetne naloge je zato

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{2x}(1 + 3x), \\ y_2 &= e^{2x}(2 - 3x). \end{aligned}$$

Reševanje sistema s pomočjo eksponentne funkcije matrik

Poglejmo sedaj, kako lahko v splošnem rešimo sisteme tudi takrat, ko matrika A ni diagonalizabilna. Če je A $n \times n$ matrika (kompleksna ali realna), s pomočjo običajne potenčne vrste za eksponentno funkcijo definiramo eksponent matrike kot

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots$$

Naj bodo $a_{i,j}$ koeficienti matrike A in a_{ij}^k koeficienti matrike A^k. Če označimo $M = \max_{ij} |a_{ij}|$, velja

$$\max_i |a_{ij}^{(k)}| \leq n^{k-1} M^k.$$

Zato za vsak fiksen par (i, j) vrsta

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a_{ij}^{(k)}$$

konvergira absolutno in je eksponent matrike dobro definiran za vsako matriko A. Še več, potenčna vrsta

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a_{ij}^{(k)} t^k$$

konvergira za vsak t. Posledično za matrično funkcijo e^{At} velja enakost

$$\begin{aligned}
\left(e^{At}\right)' &= \left(I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots\right)' \\
&= A + A^2t + \frac{1}{2!}A^3t^2 + \cdots \\
&= Ae^{At}.
\end{aligned}$$

Matrika $X = e^{At}$ torej reši matrično enačbo

$$\dot{X} = AX.$$

Ker je $e^{At}|_{t=0} = I$, stolpci matrike e^{At} linearno neodvisni, is so vse rešitve enačbe

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

oblike

$$\vec{x} = e^{At}\vec{c}.$$

Preden nadaljujemo, poglejmo, da nam v primeru, ko je matrika diagonalizabilna, ta način da iste rešitve, kot smo videli zgoraj. Če ima matrika A n linearno neodvisnih lastnih vektorjev $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ s pripadajočimi lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, potem je

$$A = PDP^{-1},$$

kjer je $P = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n]$ matrika, v katero zložimo lastne vektorje matrike A, D pa diagonalna matrika, ki ima po vrsti na diagonali elemente $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Ker velja $A^k = PD^kP^{-1}$, je

$$e^{At}Pe^{Dt}P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Splošna rešitev enačbe $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ je torej

$$\vec{x} = e^{At}\vec{c} = Pe^{At}\vec{d} = d_1 e^{\lambda_1 t}v_1 + d_2 e^{\lambda_2 t}v_2 + \cdots + d_n e^{\lambda_n t}v_n.$$

Če matrika A ni diagonalizabilna, matriko e^{At} najlažje izračunamo preko Jordanove kanonične forme matrike A.

Jordanova kletka je vsaka matrika oblike

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Indeks k pomeni dimenzijo matrike. $J_k(\lambda)$ je torej $k \times k$ matrika z λ po diagonali in 1 povsod nad diagonalo. Vsi ostali elementi matrike so 0. Brez dokaza navedimo naslednji izrek.

Izrek (Jordanova kanonična forma). *Naj bo A $n \times n$ matrika. Potem obstaja obrnljiva $n \times n$ matrika P, da velja*

$$A = P \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{k_l}(\lambda_l) \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ so (ne nujno različne) lastne vrednosti matrike A, za velikosti Jordanovih kletk pa velja $k_1 + k_2 + \cdots + k_l = n$.

Zgornjemu zapisu rečemo Jordanova kanonična forma matrike A. Pove nam, da je matrika A podobna zgornjemu trikotnemu bloku diagonalne matrike, ki ima po diagonali Jordanove kletke. Če je matrika diagonalizabilna, so vse Jordanove kletke dimenzije 1 in je Jordanova kanonična forma diagonalna matrika, če pa je algebraična večkratnost neke lastne vrednosti večja od geometrijske večkratnosti, pa imamo nujno v formi Jordanove kletke višjih dimenzij.

Ker je

$$e^{At} = P \begin{pmatrix} e^{J_{k_1}(\lambda_1)t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_{k_2}(\lambda_2)t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{J_{k_l}(\lambda_l)t} \end{pmatrix} P^{-1},$$

moramo za izračun eksponenta matrike izračunati eksponente Jordanovih kletk. Vidimo lahko, da velja

$$e^{J_k(\lambda)t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!}e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{k-3}}{(k-3)!}e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Splošna rešitev sistema $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ je torej vselej kombinacija členov oblike $t^l e^{\lambda t}\vec{v}$, kjer je λ neka lastna vrednost matrike A.

Reševanje nehomogenega sistema

V tem razdelku bomo pokazali, kako lahko iz splošne rešitve homogenega sistema dobimo rešitev nehomogenega sistema. Naj bo torej

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{f}(t)$$

nehomogen sistem, pri čemer predpostavimo, da so koeficienti matrike A in komponente vektorja $\vec{f}$ zvezne funkcije. Homogenemu sistemu

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t)$$

bomo rekli pripadajoč homogen sistem.

Trditev. *Naj bo $\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{f}(t)$ nehomogen sistem linearnih diferencialnih enačb prvega reda. Če je $\vec{x}$ rešitev pripadajočega homogenega sistema $\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t)$ in je $\vec{x}_P$ neka rešitev nehomogenega sistema, je $\vec{y} = \vec{x} + \vec{x}_P$ rešitev nehomogenega sistema $\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{f}(t)$.*

Dokaz.

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \dot{\vec{x}} + \dot{\vec{x}}_P = A\vec{x} + A\vec{x}_P + \vec{f} \\ &= A(\vec{x} + \vec{x}_P) + \vec{f} = A\vec{y} + \vec{f}. \end{aligned}$$

□

Trditev. *Če sta $\vec{y}_1$ in $\vec{y}_2$ dve rešitvi nehomogenega sistema $\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{f}$, potem je $\vec{x} = \vec{y}_1 - \vec{y}_2$ rešitev pripadajočega homogenega sistema $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$.*

Dokaz.

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \dot{\vec{y}}_1 + \dot{\vec{y}}_2 = A\vec{y}_1 + \vec{f} - (A\vec{y}_2 + \vec{f}) \\ &= A(\vec{y}_1 - \vec{y}_2) = A\vec{x}. \end{aligned}$$

□

Obe zgornji trditvi nam dasta posledico:

Posledica. *Če poznamo neko (partikularno) rešitev x_P nehomogenega sistema $\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{f}$, potem je vsaka rešitev $\vec{y}$ nehomogenega sistema oblike $\vec{y} = \vec{x} + \vec{x}_P$, kjer je $\vec{x}$ neka rešitev homogenega sistema $\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t)$.*

Dokaz. Naj bo $\vec{x}_p$ neka rešitev nehomogenega sistema, t_0 poljubna točka in $\Psi(t, t_0)$ fundamentalna matrika za homogen sistem $\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t)$, kar pomeni, da $\Psi(t, t_0)$ reši matrični sistem $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ in je $\Psi(t_0, t_0) = I$. Naj bo $\vec{y}$ poljubna rešitev nehomogenega sistema. Potem je

$$\vec{y}_1 = \Psi(t, t_0)(\vec{y}(t_0) - \vec{x}_P(t_0)) + \vec{x}_P$$

rešitev nehomogenega sistema, za katero velja $\vec{y}_1(t_0) = \vec{y}(t_0)$. Zaradi enoličnosti je $\vec{y}_1(t) = \vec{y}(t)$ za vsak t. □

Sedaj poglejmo, kako lahko iz splošne rešitve homogenega sistema poiščemo neko (in s tem vsako) rešitev nehomogenega sistema. Naj bo $\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{f}(t)$ nehomogen sistem in X neka nesingularna rešitev homogenega matričnega sistema $\dot{X} = AX$. Rešitev nehomogenega sistema bomo poiskali s pomočjo nastavka

$$\vec{y} = X\vec{w},$$

kjer je $\vec{w}$ neka $\mathcal{C}^1$ vektorska funkcija. Vektorska funkcija $\vec{y}$ bo rešitev nehomogenega sistema, če bo veljalo

$$\dot{\vec{y}} = \dot{X}\vec{w} + X\dot{\vec{w}} = AX\vec{w} + X\dot{w} = AX\vec{w} + \vec{f}.$$

Torej mora biti $\vec{w}$ taka funkcija, da bo

$$X\dot{\vec{w}} = \vec{f}$$

oziroma

$$\dot{\vec{w}} = X^{-1}\vec{f}.$$

Rešitev $\vec{w}$ dobimo preprosto z integracijo

$$\vec{w} = \int X^{-1}\vec{f}dt.$$

Če vzamemo določeni integral

$$\vec{w} = \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)d\tau,$$

bo

$$\vec{x}_P(t) = X\vec{w} = \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} \Psi(t,\tau)\vec{f}(\tau)d\tau$$

(tista) partikularna rešitev nehomogenega sistema, za katero velja začetni pogoj $\vec{y}(t_0) = 0$.

Splošno rešitev nehomogenega sistema $\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{f}$ torej lahko dobimo s pomočjo formule

$$\vec{y}(t) = X\left(\vec{c} + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)d\tau\right),$$

rešitev s podanim začetnim pogojem $\vec{x}(t_0) = \vec{c}$ pa najlažje zapišemo v obliki

$$\Psi(t,t_0)\vec{c} + \int_{t_0}^{t}\Psi(t,\tau)\vec{f}d\tau.$$

Primer. Poiščimo rešitev sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x - 5y + 2e^t\\ \dot{y} &= x - 2y\end{aligned}$$

pri začetnem pogoju $x(0) = y(0) = 0$.

Najprej rešimo homogen sistem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x - 5y\\ \dot{y} &= x - 2y\end{aligned}$$

Lastni vrednosti matrike sistema sta $\pm i$, zastni vektor za $\lambda = i$ pa je $\vec{v} = (2+i, 1)^T$. Zato lahko za rešivi vzamemo realni in imaginarni del kompleksne rešitve

$$\begin{aligned}e^{it}\begin{bmatrix}2+i\\1\end{bmatrix} &= (\cos t + i\sin t)\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + i\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)\\ &= \begin{bmatrix}2\cos t - \sin t\\ \cos t\end{bmatrix} + i\begin{bmatrix}2\sin t + \cos t\\ \sin t\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Za matriko rešitev X torej lahko vzamemo

$$X = \begin{bmatrix}2\cos t - \sin t & 2\sin t + \cos t\\ \cos t & \sin t\end{bmatrix}.$$

Partikularno rešitev iščemo v obliki $X\vec{w}$ in dobimo

$$\dot{\vec{w}} = X^{-1}\begin{bmatrix}2e^t\\0\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\sin t & -2\sin t - \cos t\\ -\cos t & 2\cos t - \sin t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2e^t\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2e^t\sin t\\ 2e^t\cos t\end{bmatrix}.$$

Z integracijo dobimo

$$\vec{w} = \begin{bmatrix}e^t(\cos t - \sin t)\\ e^t(\cos t + \sin t)\end{bmatrix}.$$

Za partikularno rešitev lahko vzamemo

$$X\vec{w} = \begin{bmatrix}2\cos t - \sin t & 2\sin t + \cos t\\ \cos t & \sin t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^t(\cos t - \sin t)\\ e^t(\cos t + \sin t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3e^t\\ e^t\end{bmatrix},$$

splošno rešitev je

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}2\cos t - \sin t\\ \cos t\end{bmatrix} + B\begin{bmatrix}2\sin t + \cos t\\ \sin t\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3e^t\\ e^t\end{bmatrix}.$$

Če upoštevamo še začetni pogoj $x(0) = y(0) = 0$, določimo A in B, tako, da velja

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

torej $A = B = -1$. Tako dobimo

$$\begin{aligned} x(t) &= 3e^t - 3\cos t - \sin t \\ y(t) &= e^t - \cos t - \sin t \end{aligned}$$

.

Primer (Richardsonov model za oborožitveno tekmo). Z Richardsonovim modelom modeliramo izdatke dveh držav, ki sta vstopili v oborožitveno tekmo, namenjene oboroževanju. Označimo z $x(t)$ izdatke prve države in z $y(t)$ izdatke druge države v letu t. Pri Richardsonovem modelu predpostavimo:

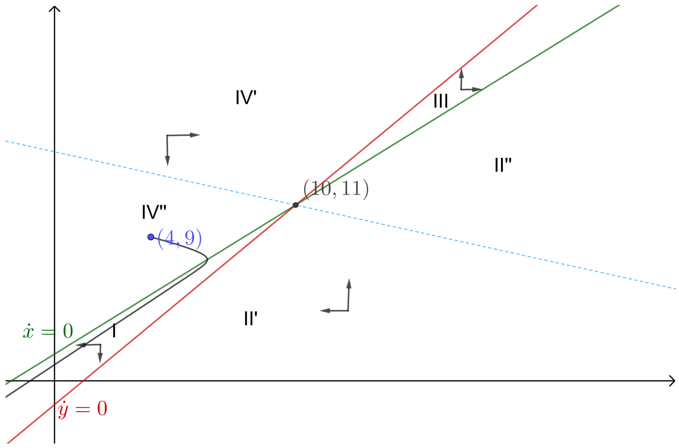
- Izdatki za oborožitev države se povečujejo sorazmerno z izdatki za oborožitev druge države.
- Izdatki za oborožitev države se zmanjšujejo sorazmerno z izdatki, ki jih trenutno namenja za oborožitev (pogosto gre za pritisk javnosti, ki je nezadovoljna z visokim deležem proračuna, ki je namenjen oboroževanju).
- Državi vsako leto bodisi konstantno povečujeta izdatke (morda gre za pritisk vojaške industrije), ali pa jih morda konstantno zmanjšujeta (na podlagi nekih vnaprej sklenjenih dogovorov med državama).

Richardsonov model tako lahko predstavimo s sistemom dveh linearnih parcialnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ay - mx + r \\ \dot{y}(t) &= bx - ny + s. \end{aligned}$$

Pri tem so a, b, n, m pozitivna realna števila (m, n sta načeloma lahko tudi 0), r, s pa lahko zavzameta poljubne vrednosti. Poglejmo si konkreten primer

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 15y - 14x - 25 \\ \frac{dy}{dt} &= 5x - 4y - 6. \end{aligned}$$



Rešitev sistema si lahko grafično predstavljamo kot krivuljo $(x(t), y(t))$ v ravnini. Kvalitativno obnašanje te krivulje lahko analiziramo tako, da ravnino razdelimo na 4 območja, glede na predznačenost odvodov $\dot{x}$ in $\dot{y}$. V območju I sta oba odvoda negativna, v območju II je $\dot{y} > 0$, $\dot{x} < 0$,.... Če se začetni pogoj nahaja v območju I, potem rešitev ostane v območju I ves čas, obe koordinati se zmanjšujeta. Če se začetni pogoj nahaja v območju III, potem rešitev ostane v območju III ves čas, obe koordinati se povečujeta v neskončno. Če se začetni pogoj nahaja v območju II ali IV, potem rešitev slej ko prej pride v območje I (iz II' in IV") ali III (iz II" in IV').
Da poiščemo eksplicitno rešiti, moramo rešiti linearen sistem

$$\frac{dx}{dt} = 15y - 14x - 25$$
$$\frac{dy}{dt} = 5x - 4y - 6.$$

Matrika sistema je

$$\begin{bmatrix} -14 & 15 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Lastne vrednosti matrike sta

$$\lambda_1 = 1 \text{ in } \lambda_2 = -19$$

s pripadajočima lastnima vektorjema

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ in } v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Partikularna rešitev enačbe je kar presečišče $(x', y') = (10, 11)$. Splošna rešitev je torej

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Ae^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + Be^{-19t} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Za začetne pogoje vzdolž premice $(10, 11) + s(3, -1)$ torej rešitev konvergira proti stacionarni rešitvi $(10, 11)$, pod to premico rešitve slej ko prej prečkajo v območje I in prečkajo eno od koordinatnih osi ($A < 0$), nad premico pa slej ko prečkajo v območje III in obe koordinati narašča čez vse meje.

Poglejmo si primer rešitve pri začetnem pogoju $(x(0), y(0)) = (4, 9)$. Za A in B mora veljati enačba

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix},$$

kar pomeni

$$A = -3 \text{ in } B = -1.$$

Končna rešitev je torej

$$\begin{aligned} x(t) &= 10 - 3e^{t} - 3e^{-19t}, \\ y(t) &= 11 - 3e^{t} + e^{-19t}. \end{aligned}$$

Nelinearni sistemi diferencialnih enačb 1. reda

V tem poglavju bomo predvsem obravnavali avtonomne sisteme diferencialnih enačb 1. reda, to so sistemi oblike

$$\begin{aligned} y_1' &= F_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' &= F_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\cdots \\ y_n' &= F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{aligned}$$

kjer so $F_1, F_2, \ldots, F_n$ neke funkcije n spremenljivk. Funkcije $F_1, F_2, \ldots, F_n$ torej niso odvisne od neodvisne spremenljivke x. Čeprav splošnih avtonomnih sistemov običajno ne znamo eksplicitno rešiti, pogosto znamo poiskati tako imenovane *stacionarne rešitve sistema*, to so konstantne rešitve, ki jih dobimo tako, da rešimo sistem enačb

$$F_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = F_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \cdots = F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0.$$

S pomočjo linearizacije v okolici stacionarnih rešitev, lahko pogosto tudi ugotovimo obnašanje rešitev v bližini stacionarnih rešitev.

Fazni portret in trajektorije

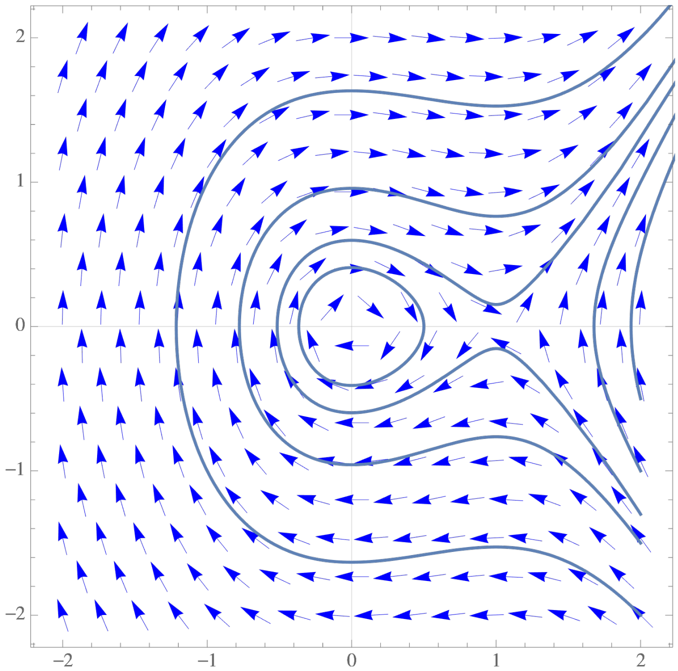
Poglejmo si avtonomni sistem dveh enačb

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y). \end{aligned} \tag{5}$$

Vsaka rešitev takega sistema je par funkcij $x(t)$, $y(t)$, ki sta definirani na nekem časovnem intervalu. Tak par funkcij bo rešitev začetne naloge $x(t_0) = x^0$, $y(t_0) = y^0$, če bo seveda hkrati veljalo še $x(t_0) = x^0$, $y(t_0) = y^0$. Par rešitev $x(t), y(t)$ lahko v xy-ravnini predstavimo kot krivuljo $t \mapsto (x(t), y(t))$. Taki krivulji rečemo *trajektorija*. Trajektorija je v poljubni točki $(x(t), y(t))$ tangenta na vektor $(f(x(t), y(t)), g(x(t), y(t)))^T$, saj velja

$$\dot{x}(t) = f(x(t), y(t)), \qquad \dot{y}(t) = g(x(t), y(t)).$$

Če v vsaki točki ravnine torej narišemo vektor $(f(x, y), g(x, y))^T$, bodo trajektorije vedno tangentne na to vektorsko polje.



Fazni diagram in nekaj trajektorij za sistem $x' = y; y' = -x + x^2$.

Linearizacija avtonomnega sistema v bližini stacionarne rešitve

Poglejmo si najprej homogen sistem dveh linearnih enačb s kontantnimi koeficienti

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned}$$

Sistem je avtonomen in če predpostavimo, da je matrika sistema nesingularna. ima eno samo stacionarno rešitev, to je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitve dobimo tako, da poiščemo lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Imamo tri možnosti. Lahko imamo dva linearno neodvisna realna lastna vektorja $\vec{v}_2$ in $\vec{v}_2$, ki pripadata dvema (ne nujno različnima si) lastnima vrednostma λ_1 in λ_2. V tem primeru je splošna rešitev oblike

$$y = Ae^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + Be^{\lambda_2 t}\vec{v}_2. \tag{6}$$

Lahko imamo en sam realen lastni vektor $\vec{v}$ za dvojno realno lastno vrednost λ. V tem primeru je splošna rešitev oblike

$$y = Ae^{\lambda t}\vec{v} + Bte^{\lambda t}\vec{v} + Be^{\lambda t}\vec{w}, \tag{7}$$

kjer je $\vec{w}$ korenski vektor, torej vektor, ki reši sistem $(A - \lambda I)\vec{w} = \vec{v}$. Tretja možnost je, da imamo dve konjugirani si kompleksni lastni vrednosti λ in $\bar{\lambda}$. Če je $\lambda = \mu + i\omega$ in $\vec{v} = \vec{u} + i\vec{w}$ je splošna rešitev oblike

$$y = Ae^{\mu t}(\cos(\omega t)\vec{u} - \sin(\omega t)\vec{w}) + Be^{\mu t}(\cos(\omega t)\vec{w} + \sin(\omega t)\vec{u}) \tag{8}$$

Iz zgornjih zapisov lahko vidimo, je dolgoročno obnašanje rešitev odvisno predvsem od lastnih vrednosti sistema:

(i) Če sta obe (ne nujno različni si) lastni vrednosti realni in pozitivni, vse rešitve, razen stacionarne, divergirajo v neskončno. Ker gredo vse rešitve, ki začnejo blizu stacionarne rešitve, stran od stacionarne rešitve rečemo, da je stacionarna rešitev *izvor*. Izvor je *nestabilna* stacionarna rešitev.

(ii) Če sta obe (ne nujno različni si) lastni vrednosti realni in negativni, vse rešitve na dolgi rok konvergirajo k stacionarni rešitvi. Ker gredo vse rešitve, ki začnejo blizu stacionarne rešitve, proti stacionarni rešitvi rečemo, da je stacionarna rešitev *ponor*. Ponor je *asimptotsko stabilna* stacionarna rešitev.

(iii) Če sta obe lastni vrednosti realni in različno predznačeni, rešitve za skoraj vsak začetni pogoj divergirajo proti neskončno. V tem primeru rečemo, da je stacionarna rešitev *sedlo*. Sedlo je nestabilna stacionarna rešitev.

(iv) Če ima kompleksna lastna vrednost negativen realni del, se vse rešitve na dolgi rok približujejo stacionarni rešitvi, in je stacionarna rešitev zopet ponor, torej asimptotsko stabilna.

(v) Če ima kompleksna lastna vrednost pozitiven realni del, se vse rešitve oddaljujejo od stacionarne rešitve, in je stacionarna rešitev zopet izvor, torej nestabilna.

(vi) Če ima kompleksna lastna vrednost realni del enak 0, vse rešitve, ki začnejo blizu stacionarne rešitve, ostanejo blizu stacionarne rešitve (trajektorije so elipse). V tem primeru rečemo, da je stacionarna rešitev *stabilna*.

Obnašanje rešitev v okolici stacionarnih rešitev avtonomnega sistema lahko razumemo s pomočjo linearizacije sistema. Zaradi preprostosti si poglejmo sistem dveh enačb

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y). \end{aligned}$$

in naj bo (x_0, y_0) stacionarna rešitev, torej $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. Če sta funkciji f in g razreda $\mathcal{C}^1$, dobimo aproksimacijo

$$\begin{bmatrix} f(x - x_0, y - y_0) \\ g(x - x_0, y - y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_o) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_o) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_o) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_o) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + o(|(x - x_0, y - y_o|),$$

kjer velja

$$\lim_{x \to x_0, y \to y_0} \frac{o(|(x - x_0, y - y_o|)}{|(x - x_0, y - y_0)|} = 0.$$

Če vstavimo zamenjavo spremenljivk $u = x - x_0$ in $v = y - y_0$ dobimo tako sistem

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_o) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_o) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_o) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_o) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} + o(|(u, v|).$$

Linearnemu sistemu

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_o) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_o) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_o) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_o) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}$$

rečemo linearizacija v okolici stacionarne rešitve (x_0, y_0) in izkaže se, da linearizacija dokaj dobro opisuje obnašanje rešitev v okolici stacionarne rešitve.

Izrek. *Naj bo*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y). \end{aligned}$$

avtonomen sistem, pri čemer sta f in g razreda $\mathcal{C}^1$ v okolici stacionarne rešitve (x_0, y_0) in naj bo

$$D == \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_o) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_o) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_o) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_o) \end{bmatrix}$$

diferencial v točki (x_0, y_0). Stacionarna rešitev (x_0, y_0) je asimptotsko stabilna, sta obe lastni vrednosti realni in negativni, oziroma če imata (konjugirani si) kompleksni lastni vrednosti negativen realni del. Če je vsaj ena realna lastna vrednost pozitivna oziroma imata (konjugirani si) kompleksni lastni vrednosti pozitiven realni del, je stacionarna rešitev nestabilna.

Zgornji izrek lahko seveda posplošimo na sisteme več enačb. V tem primeru bo stacionarna rešitev asimptotsko stabilna, če bodo realni deli vseh lastnih vrednosti negativni, in bo nestabilna, če bo vsaj kakšna lastna vrednost imela pozitiven realni del. V primeru, če ima kakšna lastna vrednost ničeln realni del, vse ostale pa imajo negativne realne dele, ne moremo nujno sklepati o stabilnosti ali nestabilnosti rešitve.

Populacijska dinamika

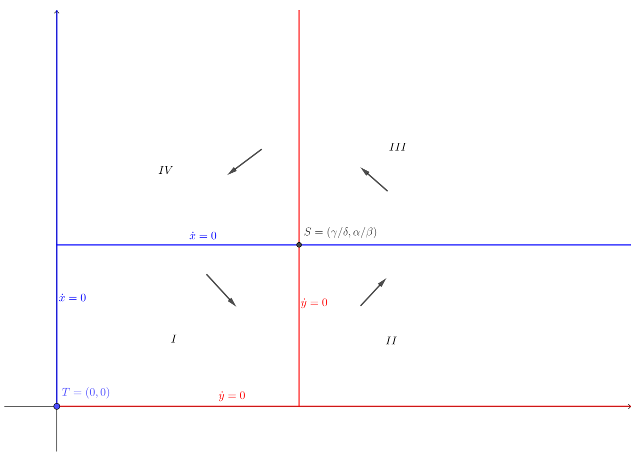
V tem razdelku si bomo pogledali preproste modele, ki opisujejo interakcijo med dvema populacijama, ki živita na istem področju. Pogledali si bomo štiri tipe interakcij: plenilec/plen, tekmovanje in obligatorno ter fakultativno simbiozo.

Plenilec/plen. Interakcijo med plenom in plenilcem opisujejo tako imenovane Lotka-Volterra enačbe:

$$\dot{x} = \alpha x - \beta xy$$
$$\dot{y} = -\gamma y + \delta xy.$$

Vse konstante so pozitivne. Pri tem modelu predpostavimo, da bi se število plena ($x(t)$) sicer povečevala eksponentno, prisotnost plenilca pa količino plena zmanjšuje proporcionalno s količino stikov med plenom in plenilcem ($-\beta xy$). Podobno bi se odsotnosti plena število plenilcev upada eksponentno, pozitivno pa vpliva število stikov med plenom in plenilce.

Ko rišemo fazni diagram, je smiselno narisati krivulje, vzdolž katerih je ali $\dot{x} = 0$ ali $\dot{y} = 0$. Tam, kjer se ti dve krivulji sekata, dobimo stacionarni rešitvi. $\dot{x} = 0$ vzdolž premic $x = 0$ in $y = \alpha/\beta$, $\dot{y} = 0$ pa vzdolž premic $y = 0$ in $x = \gamma/\delta$. Ker sta premici $x = 0$ in $y = 0$ uniji trajektorij, nobena rešitev, ki se začne v prvem kvadrantu, ne more pobegniti iz prvega kvadranta. To je seveda pričakovati, ker negativne vrednosti x in y nimajo posebnega smisla. Tako se lahko pri reševanju osredotočimo le na prvi kvadrant, ki ga premici $y = \alpha/\beta$ in $x = \gamma/\delta$ razdelita na štiri področja. V vsakem od teh štirih področij lahko enostavno s puščico označimo približno smer trajektoriji.



Reduciran fazni diagram za sistem Lotka-Volterra

Točki S in T predstavljata stacionarni rešitvi. V I območju je $\dot{x} > 0$ in $\dot{y} < 0$, zato se trajektoriji tam x koordinata povečuje, y pa zmanjšuje. Ko gre t v neskončno, se trajektorija lahko le približuje stacionarni točki, ali pa divergira v neskončno, zato vsaka trajektorija slej ko prej pride iz območja I v območje II. Ker je v območju II $\dot{x} > 0$ in $\dot{y} > 0$, se obe koordinati povečujeta, in slej ko prej trajektorija preide v območje II. Podobno vidimo da gre vsaka trajektorija iz območja III v območje IV in nato naprej v I. Trajektorije tako "krožijo" okrog stacionarne rešitve S. Poglejmo si, da so trajektorije dejansko sklenjene krivulje. Če delimo enačbi

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} &= -\gamma y + \delta xy,\end{aligned}$$

dobimo diferencialno enačbo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\gamma y + \delta xy}{\alpha x - \beta xy}$$

za trajektorije. Ta enačba ima ločljive spremenljivke, in dobimo

$$\frac{\alpha - \beta y}{y} dy = \frac{-\gamma + \delta x}{x} dx$$

in z integracijo

$$\alpha \ln |y| - \beta y = -\gamma \ln |x| + \delta x + C.$$

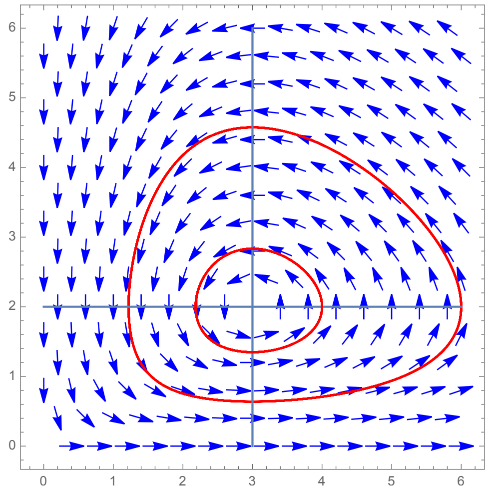
Ker nas zanima le prvi kvadrant, lahko absolutne vrednosti izpustimo in dobimo implicitno obliko trajektorij

$$\alpha \ln y - \beta y + \gamma \ln x - \delta x = C.$$

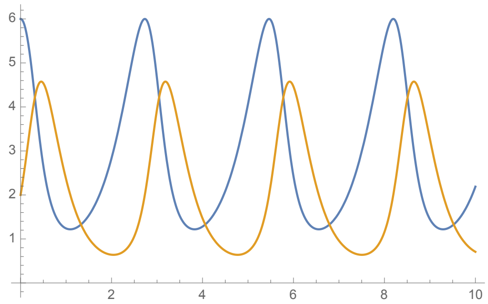
Da dokažemo, da ao trajektorija sklenjene je dovolj, da pokažemo, da pri vsakem C krivulja največ dva krat seka premico $x = \gamma/\delta$. Če torej vstavimo to vrednost za x, dobimo

$$\alpha \ln y - \beta y = C + \gamma - \gamma \ln(\gamma/\delta).$$

Označimo $g(y) = \alpha \ln y - \beta y$ in $D = C + \gamma - \gamma \ln(\gamma/\delta)$. Velja $g'(y) = \frac{\alpha}{y} - \beta$. Funkcija g torej narašča za $y < \alpha/\beta$ in pada za $y > \alpha/\beta$. Zato lahko vsako vrednost, v našem primeru D, doseže največ dva krat.



Fazni diagram in dve trajektoriji pri $\alpha = 2, \beta = \delta = 1, \gamma = 3$.



Graf $x(t)$ (modra) in $y(t)$ (oranžna) pri $\alpha = 2, \beta = \delta = 1, \gamma = 3$.

Stacionarna rešitev S je stabilna, saj rešitve, ki se začnejo blizu S ostanejo blizu S (ni pa seveda asimptotsko stabilna). Poglejmo si še linearizacijo sistema Lotka-Volterra v okolici stacionarne rešitve $S = (\gamma/\delta, \alpha/\beta)$. Če označimo $u = x - \gamma/\delta$ in $v = y - \alpha/\beta$, je linearizacija enaka

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\beta\gamma/\delta \\ \alpha\delta/\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Matrika tega sistema ima imaginarni lastni vrednosti $\lambda_{1,2} = i\sqrt{\alpha\gamma}$. Stacionarna rešitev $(0,0)$ lineariziranega sistema je sicer stabilna, vendar iz tega nismo mogli nujno sklepati na stabilnost stacionarne rešitve S.

Tekmovanje. Predpostavimo, da imamo dve različni vrsti, ki živita na istem področju, in tekmujeta za iste naravne vire. Lahko si na primer predstavljamo potočno postrv in soško postrv. Interakcijo med vrstama lahko opišemo z enačbama

$$\dot{x} = \alpha x(1 - x/K) - \beta xy$$
$$\dot{y} = \gamma y(1 - y/L) - \delta xy.$$

Pri tem smo za vsako od vrst predpostavili, da bi se v odsotnosti druge vrste obnašala logistično. Vse konstante so pozitivne, od vrednosti teh konstant pa je, kot bomo videli, odvisno dolgoročno obnašanje vrst.

Podobno, kot zgoraj, na fazni diagram narišemo krivulji, vzdolž katerih je ali $\dot{x} = 0$ ali $\dot{y} = 0$. Tam, kjer se ti dve krivulji sekata, dobimo stacionarni rešitvi. $\dot{x} = 0$ vzdolž premic

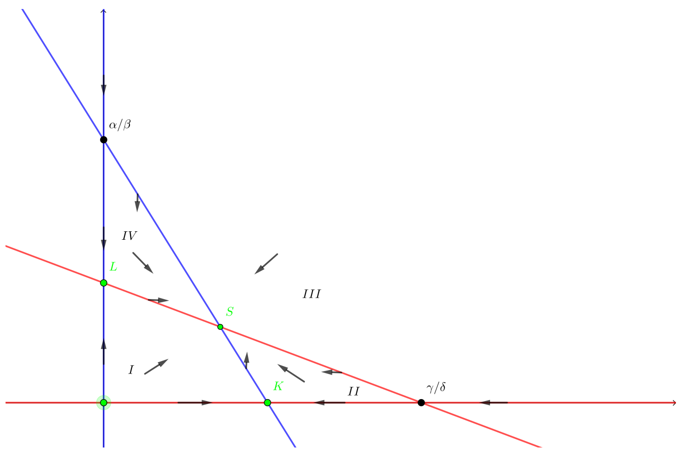
$$x = 0 \text{ in } \frac{x}{K} + \frac{y}{\alpha/\beta} = 1,$$

$\dot{y} = 0$ pa vzdolž premic

$$y = 0 \text{ in } \frac{y}{L} + \frac{x}{\gamma/\delta} = 1.$$

Premici $x = 0$ in $y = 0$ sta uniji trajektorij, zato nobena rešitev, ki se začne v prvem kvadrantu, ne more pobegniti iz prvega kvadranta. Tako se zopet lahko pri reševanju osredotočimo le na prvi kvadrant. Glede na lego ostalih dveh premic, ločimo štiri primere.

<u>$\alpha/\beta < L$ in $\gamma/\delta < K$</u>.



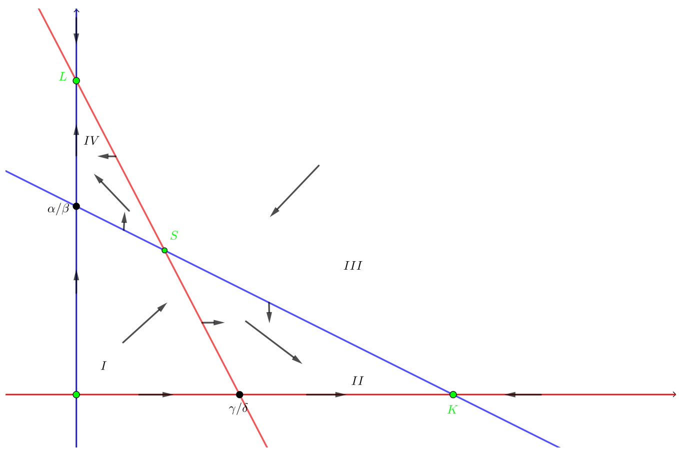
Reduciran fazni diagram pri $\alpha/\beta > L$ in $\gamma/\delta > K$.

Imamo štiri stacionarne rešitve:

$$(0,0), (K,0), (0,L) \text{ in } S(\frac{\alpha\gamma K - \beta\gamma KL}{\alpha\gamma - \beta\delta KL}, \frac{\alpha\gamma L - \alpha\delta KL}{\alpha\gamma - \beta\delta KL}).$$

Prve tri stacionarne rešitve so nestabilne. Prva je izvor, in je stanje možno, drugi dve pa sta sedelni točki. Proti tema dvema stacionarnima rešitvama se približujemo v primeru, če imamo eno samo vrsto. V primeru, če imamo v začetnem stanju predstavnike obeh vrst, se na dolgi rok približujemo stacionarni rešitvi S, ki je asimptotsko stabilna (ponor). V tem primeru torej lahko dosežemo sobivanje obeh populacij, pri čemer pa bo vsake od populacij na dolgi rok manj, kot je njena nosilnost okolja (K za x oziroma L za y).

$\alpha/\beta > L$ in $\gamma/\delta > K$.



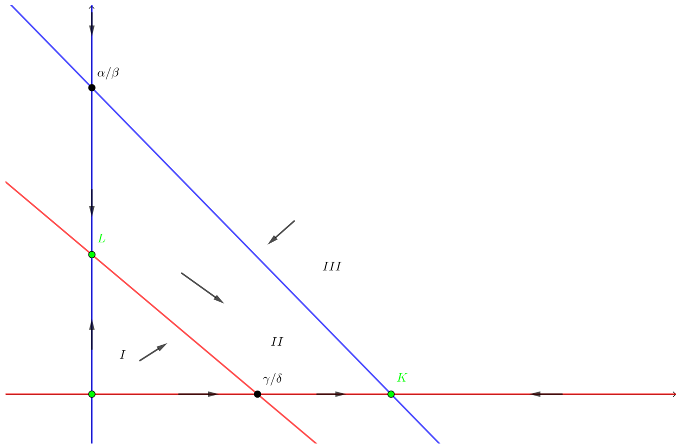
Reduciran fazni diagram pri $\alpha/\beta > L$ in $\gamma/\delta > K$.

Zopet imamo štiri stacionarne rešitve:

$$(0,0), (K,0), (0,L) \text{ in } S(\frac{\alpha\gamma K - \beta\gamma KL}{\alpha\gamma - \beta\delta KL}, \frac{\alpha\gamma L - \alpha\delta KL}{\alpha\gamma - \beta\delta KL}).$$

V tem primeru sta prva in zadnja stacionarna rešitev nestabilni. Prva je izvor, zadnja pa sedelna točka. Vsaka trajektorija, ki se nahaja v II gre proti stacionarni točki $(K, 0)$, vsaka trajektorija, ki se nahaja v iV pa proti $(0, L)$. Iz območja I gre tipična trajektorija bodisi v II, bodisi v IV, v izjemnem primeru pa proti S. Podobno se zgodi v območju III. Na dolgi rok torej lahko pričakujemo, da bo ena izmed populacij izumrla, tista, ki bo preživela, pa se bo približevala nosilnosti okolja.

$\alpha/\beta > L$ in $\gamma/\delta < K$.



Reduciran fazni diagram pri $\alpha/\beta > L$ in $\gamma/\delta < K$.

V tem primeru imamo le tri stacionarne rešitve:

$$(0,0), (0,L) \text{ in } (K,0).$$

Prvi dve sta nestabilni, tretja pa je asimptotsko stabilna. Če imamo v okolju prisotne vsaj nekaj populacije x, bo populacija y na dolgi rok izumrla, populacija x pa se bo približevala nosilnostni kapaciteti okolja K.

Četrta možnost, ko je $\alpha/\beta < L$ in $\gamma/\delta > K$, je povsem analogna, le da v tem primeru izumre populacija x.

Fakultativna simbioza. O fakultativni simbiozi med dvema vrstama govorimo, če bi vsaka od obeh vrst samostojno uspevala v okolju, vendar ji prisotnost druge vrste še dodatno koristi. Za enačbi tokrat vzamemo

$$\dot{x} = \alpha x(1 - x/K) + \beta xy$$
$$\dot{y} = \gamma y(1 - y/L) + \delta xy.$$

Za vsako od vrst smo predpostavili, da bi se v odsotnosti druge vrste obnašala logistično. Vse konstante so pozitivne, glede na vrednosti konstant pa bomo dobili dva različna modela obnašanja.

Odvod $\dot{x} = 0$ vzdolž premic

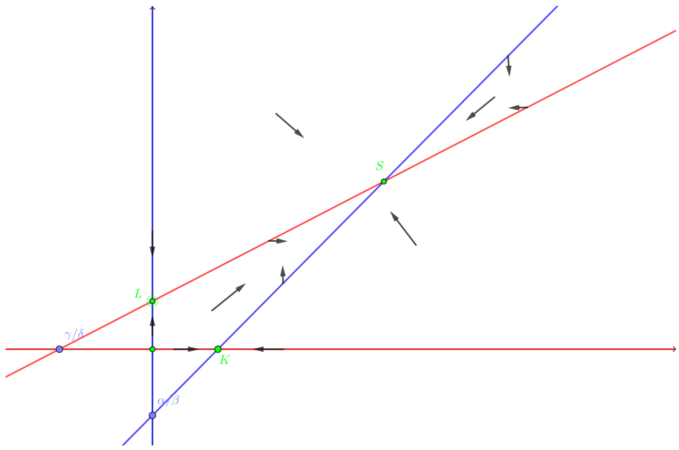
$$x = 0 \text{ in } \frac{x}{K} - \frac{y}{\alpha/\beta} = 1,$$

$\dot{y} = 0$ pa vzdolž premic

$$y = 0 \text{ in } \frac{y}{L} - \frac{x}{\gamma/\delta} = 1.$$

Premici $x = 0$ in $y = 0$ sta uniji trajektorij, zato nobena rešitev, ki se začne v prvem kvadrantu, ne more pobegniti iz prvega kvadranta. Tako se zopet lahko pri reševanju osredotočimo le na prvi kvadrant. Glede na lego ostalih dveh premic, ločimo dva primera.

$\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} > KL$.



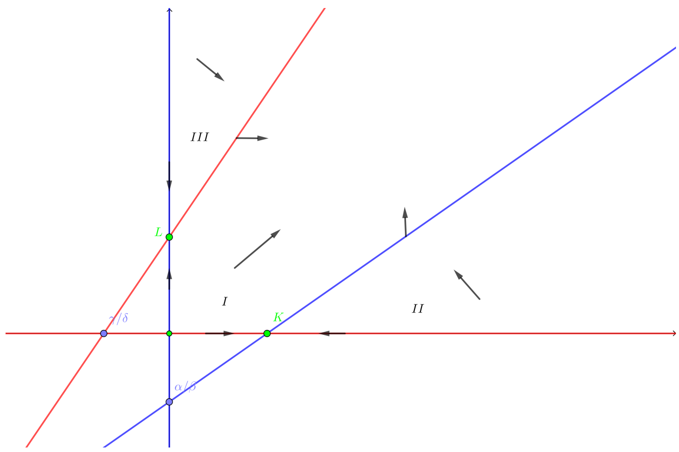
Reduciran fazni diagram pri $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} > KL$.

Imamo štiri stacionarne rešitve:

$$(0,0), (K,0), (0,L) \text{ in } S.$$

Prve tri stacionarne rešitve so nestabilne. Prva je izvor, drugi dve pa sta sedelni točki. Proti tema dvema stacionarnima rešitvama se približujemo v primeru, ko imamo eno samo vrsto. V primeru, če imamo v začetnem stanju predstavnike obeh vrst, se na dolgi rok približujemo stacionarni rešitvi S, ki je asimptotsko stabilna (ponor). V tem primeru se vsaka od populacij na dolgi rok približuje vrednosti, ki je večja od njene nosilnosti okolja (K za x oziroma L za y).

$\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} < KL$.



Reduciran fazni diagram pri $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} > KL$.

V tem primer se iz območij II in III slej ko prej premaknemo v območje I. Vsaki trajektoriji iz I pa se tako x kot tudi y koordinata povečujeta v neskončno. V tem primeru je torej učinek simbioze tako močan, da se populaciji povečujeta čez vse meje.

Obligatorna simbioza. O obligatorni simbiozi med dvema vrstama govorimo, če bi vsaka od obeh samostojno izumrla, vendar ji prisotnost druge koristi pri preživetju. Za enačbi tokrat vzamemo

$$\dot{x} = -\alpha x + \beta xy$$
$$\dot{y} = -\gamma y + \delta xy.$$

Za vsako od vrst smo predpostavili, da v odsotnosti druge vrste izumira eksponentno. Vse konstante so pozitivne. Odvod $\dot{x} = 0$ vzdolž premic

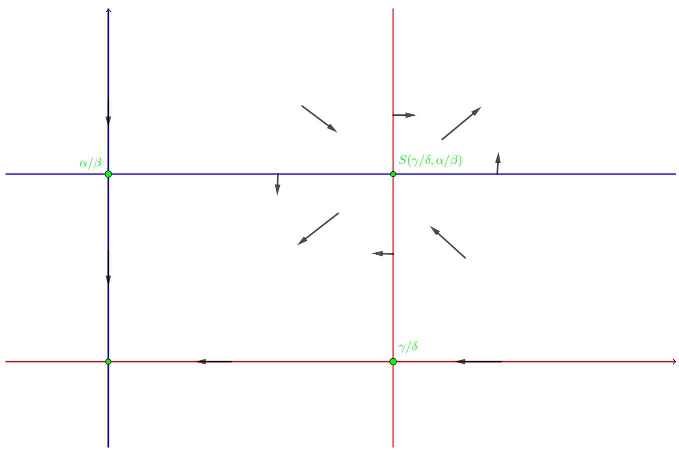
$$x = 0 \text{ in } y = \alpha/\beta,$$

$\dot{y} = 0$ pa vzdolž premic

$$y = 0 \text{ in } x = \gamma/\delta.$$

Premici $x = 0$ in $y = 0$ sta uniji trajektorij, zato nobena rešitev, ki se začne v prvem kvadrantu, ne more pobegniti iz prvega kvadranta. Tako se zopet lahko pri reševanju osredotočimo le na prvi kvadrant.

$\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} > KL.$



Reduciran fazni diagram pri obligativni simbiozi.

Imamo dve stacionarni rešitvi: $(0, 0)$ in $S(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$. Prva je asimptotsko stabilna rešitev (ponor), druga pa nestabilna (sedlo). Vse trajektorije iz I gredo proti rešitvi $(0, 0)$, torej obe populaciji izumreta. Pri vseh trajektorijah iz IV se obe koordinati povečujeta čez vse meje. Iz območij II ali IV pa gredo trajektorije najprej bodisi v I, bodisi v IV, v izjemnem primeru pa proti S. V tem primeru lahko, analogno kot pri Lotka-Volterra modelu, poiščemo eksplicitno enačbo trajektorij:

$$\gamma \ln x - \alpha \ln y + \beta y - \delta x = C.$$

Poglejmo si bolj natančno primer enačb

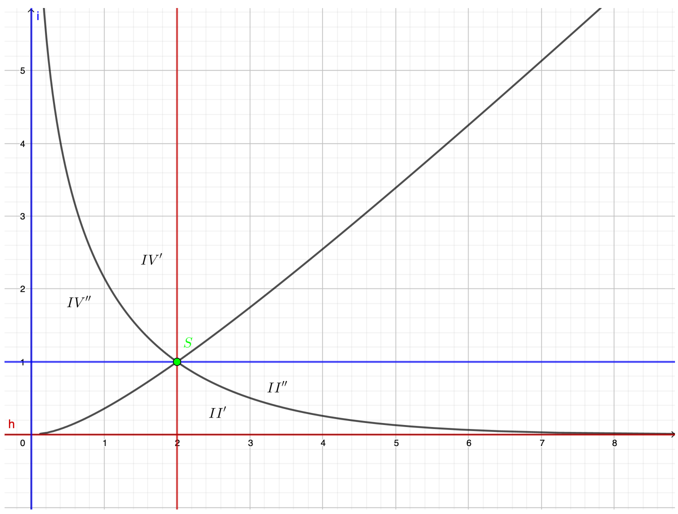
$$\dot{x} = -x + xy$$
$$\dot{y} = -2y + xy.$$

Trajektorije imajo enačbo

$$2 \ln x - \ln y + y - x = C.$$

Enačbo trajektorije, ki gre skozi točko $S(2, 1)$, dobimo tako, da točko vstavimo v enačbo:

$$2 \ln x - \ln y + y - x = 2 \ln 2 - 1.$$



V tem primeru vidimo bolj natančno, katere trajektorije iz območij II in IV preidejo slej ko prej v bodisi območje III (II'' in IV'), bodisi območje I (II' in IV'').

Osnovni epidemiološki modeli

V tem razdelku si bomo pogledali nekaj osnovnih epidemioloških modelov, ki modelirajo epidemije nalezljivih bolezni. O epidemiji govorimo takrat, ko se ob vnosu obolelih posameznikov v populacijo začne število okuženih povečevati.

SI-model. Pri modelu SI razdelimo populacijo zgolj v dve skupini: tiste, ki so v nekem trenutku dovzetni za okužbo, S (sesceptible), in tiste, ki so trenutno okuženi, in lahko okužbo širijo, I (infected). Predpostavimo, da se število okuženih v neki časovni enoti spremeni proporcionalno s številom stikov med okuženimi in dovzetnimi posamezniki. Običajno predpostavimo, da bolezen poteka v krajšem časovnem obdobju, tako da ne upoštevamo spremembe velikosti populacije zaradi rojstev in smrti. Tako dobimo sistem diferencialnih enačb

$$
\begin{aligned}
S' &= -\beta SI \\
I' &= \beta SI
\end{aligned}
$$

Ker je vsota dovzetnih in okuženih posameznikov v vsakem trenutku enaka številu posameznikov v populaciji, N, lahko v drugo enačbo vstavimo $I = N - S$ in dobimo

$$I' = \beta I(N - S) = \beta N(1 - I/N).$$

Število okuženih se torej povečuje po logistični krivulji

$$\frac{NI(0)}{I(0) + (N - I(0))e^{-\beta Nt}},$$

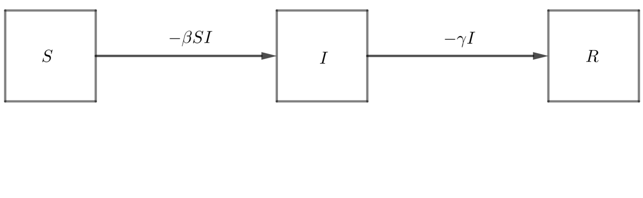
kjer je $I(0)$ število okuženih posameznikov v začetku izbruha bolezni. Model torej predvideva, da se bo slej ko prej okužila celotna populacija.

Model SI upošteva, da je vsak okužen posameznik okužen ves čas poteka epidemije in lahko tako ves čas ob srečanji z dovzetnimi posamezniki povzroča nove okužbe.

SIR-model. Najbolj uporabljen model širjenja nalezljivih bolezni je model SIR. Model sta razvila Kermack in McKendrick leta 1927. Pri tem modelu je populacija razdeljena na tri skupine: dovzetni (S), okuženi (I) in odstranjeni (R) (recovered ali removed). V razredu R so torej lahko posamezniki, ki so bodisi preboleli okužbo in zato razvili imunost za časa trajanja epidemije, ali pa so umrli za posledicami bolezni. Model prav tako upošteva relativno kratko trajanje epidemije, in v svoji osnovi različici ne upošteva rojstev ali smrti (razen tistih, povezanih z boleznijo). Model SIR zapišemo z enačbami

$$
\begin{aligned}
S' &= -\beta SI \\
I' &= \beta SI - \gamma I \\
R' &= \gamma I.
\end{aligned}
$$

Člen βSI zopet predstavlja število novo okuženih v nekem časovnem obdobju, in je sorazmerno številu srečanj med dovzetnimi in okuženimi posamezniki. V tem modelu predpostavimo, da se število okuženih posameznikov zmanjšuje, bodisi zaradi ozdravitve ali pa zaradi smrti, sorazmerno s številom okuženih. Zato člen $-\gamma I$.



Predpostavimo, da je število vseh pripadnikov populacije enako N, ob začetku spremljanja bolezni pa v populacijo vstopi nekaj okuženih posameznikov. Tako je $S(0) \approx N$, $I(0) \approx 0$ in $R(0) = 0$. Ker je vsota $S' + I' + R' = 0$, seveda velja

$$I + S + R = N.$$

Ker je $I' = I(\beta S - \gamma)$, bo epidemija nastopila natanko tedaj, ko bo veljalo

$$\beta S(0) > \gamma,$$

oziroma,

$$R_0 = \frac{\beta S(0)}{\gamma} \approx \frac{\beta N}{\gamma} > 1.$$

Številu R_0 rečemo osnovno reprodukcijsko število. Poglejmo si njegov pomen. Označimo z $\bar{c}$ povprečno število medsebojnih stikov, ki jih ima v dani časovni enoti vsak par enega okuženega posameznika in enega dovzetnega posameznika, in z τ verjetnost, da se ob enem srečanju teh dveh dovzeten posameznik okuži. Ker je dovzetnih posameznikov S, bo torej $\tau\bar{c}S$ število novo okuženih v neki časovni enoti, kot posledica enega okuženega posameznika, prirastek vseh okuženih posameznikov zaradi srečanj pa $\tau\bar{c}SI$ in zato je $\tau\bar{c} = \beta$. Ker se število okuženih posameznikov v dani časovni enoti zmanjša za γI, je torej γ "del" okuženega posameznika, ki se zmanjša v eni časovni enoti. Vsak okužen posameznik bo torej okužen v povprečju $1/\gamma$ časovnih enot. Zato je

$$R_{eff} = \frac{\tau\bar{c}S(t)}{\gamma} = \frac{\beta S(t)}{\gamma}$$

povprečno število novih okužb, ki jih bo povzročil nek okužen posameznik za časa trajanja njegove bolezni, na neki časovni točki t spremljanja bolezni. Osnovno reprodukcijsko število

$$R_0 = \frac{\beta S(0)}{\gamma} \approx \frac{\beta N}{\gamma} > 1$$

pa interpretiramo kot povprečno število novih okužb, ki jih bo povzročil okužen posameznik z časa trajanja njegove bolezni v začetku spremljanja bolezni v populaciji.

Poglejmo si sedaj lastnosti rešitev enačb modela SIR. Če je $R_0 > 1$, potem se bo število okuženih začelo takoj zmanjševati, in bo bolezen v populaciji izzvenela. Predpostavimo torej, da je $R_0 > 1$. Število dovzetnih posameznikov se ves čas zmanjšuje, ker je $S' < 0$, v začetku pa I narašča. I doseže maksimalno vrednost, ko je $S = \gamma/\beta$, potem pa I pada, dokler ni $I = 0$ in bolezen izgine iz populacije. Pravzaprav ni težko dobiti zvezo med I in S. Če namreč delimo I'/S', dobimo enačbo

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\gamma}{\beta S} - 1$$

in torej

$$I = \frac{\gamma}{\beta} \ln S - S + C,$$

in ker je $S(0) \approx N$, je $C \approx N - \frac{\gamma}{\beta} \ln N$.

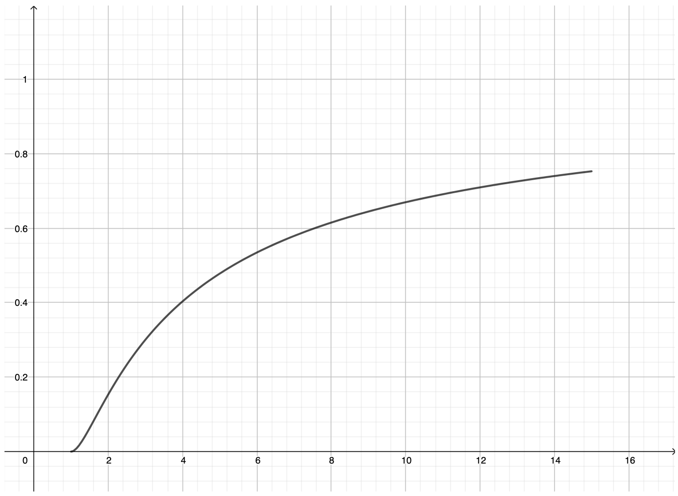
Odvisnost I od S.

Ker je

$$\lim_{S \to 0} \frac{\gamma}{\beta} \ln S - S + C = -\infty,$$

je $I = 0$ pri neki strogo pozitivni vrednosti $S = S_\infty$, maksimalno število okuženih pa je pri $S = \gamma/\beta \approx \frac{N}{R_0}$

$$I_{max} \approx \frac{N}{R_0} \ln \frac{N}{R_0} - \frac{N}{R_0} + N - \frac{N}{R_0} \ln N = N \left(1 - \frac{1 + \ln R_0}{R_0} \right)$$



Maksimalno število okuženih, kot procent celotne populacije, v odvisnosti od R_0.

Poglejmo sedaj še, koliko posameznikov v populaciji bo okuženih ob koncu epidemije. Ker je ob koncu epidemije $I = 0$, je tudi $R' = 0$

in R doseže neko končno vrednost R_{max}. Če delimo enačbi za S in R, dobimo

$$\frac{dS}{dR} = -\frac{\beta}{\gamma}S,$$

in zato

$$S(R) = S(0)e^{-\frac{\beta}{\gamma}R} \approx Ne^{-\frac{\beta}{\gamma}R}.$$

Ker na koncu epidemije velja relacija $S_\infty + R_\infty = N$, dobimo

$$N = R_\infty + S(0)e^{-\frac{\beta}{\gamma}R_\infty} \approx R_\infty + Ne^{-\frac{\beta}{\gamma}R_\infty}.$$

Če upoštevamo $R_0 = N\beta/\gamma$, dobimo enačbo

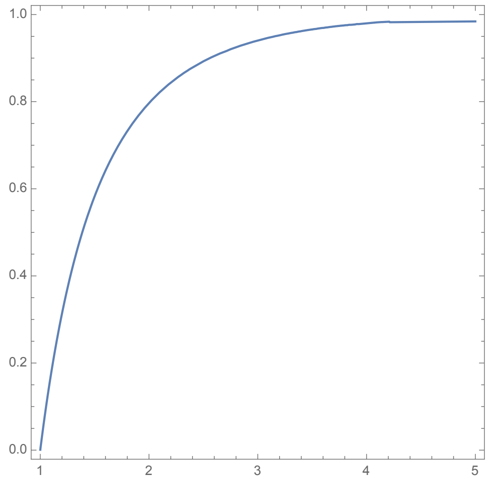
$$N \approx R_\infty + Ne^{-\frac{R_0}{N}R_\infty}.$$

Če označimo $r_\infty = R_\infty/N$ procent populacije, ki se do konca epidemije okuži, dobimo enačbo

$$1 \approx r_\infty + e^{-R_0 r_\infty}.$$

Če logaritmiramo, dobimo približno vrednost r_∞ kot rešitev enačbe

$$R_0 \approx -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$



Procent okuženih v odvisnosti od osnovnega reproduk-cijskega števila.