

## Vaje MA - Odvod - Osnovne lastnosti

1. Po definiciji izračunaj odvode naslednjih funkcij v točki  $a$ :

(a)  $f(x) = x^2 + 2x - 1, \quad a = 2,$

(b)  $f(x) = \frac{3}{x^3}, \quad a = -1,$

2. Po definiciji izračunaj odvode naslednjih funkcij:

(a)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}},$

(b)  $f(x) = \sin(3x).$

3. Odvajaj naslednje funkcije:

(a)  $y = \frac{3}{x^2} + 2\sqrt[3]{x\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}},$

(g)  $y = \sin(3x + \frac{\pi}{3}),$

(b)  $y = e^x \cos x,$

(h)  $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x},$

(c)  $y = (\sin x + 2^x) \log(x),$

(i)  $y = \arcsin(1 + e^x),$

(d)  $y = (x^2 + 2^x) \arcsin x,$

(j)  $y = e^{\sin x},$

(e)  $y = \frac{\arctan x}{\ln x},$

(k)  $y = \sqrt[5]{\cos(2 \ln(x) + 1)},$

(f)  $y = \frac{2e^x + 1}{\sqrt[3]{x + \sin x}},$

(l)  $y = (1 + x)^{\frac{1}{x}},$

4. *Hiperbolične funkcije*, kosinus, sinus in tangens, so definirane z naslednjimi predpisi:

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}.$$

Na območjih, kjer so hiperbolične funkcije injektivne, definiramo inverzne funkcije, *area* funkcije, Arsh, Arch in Arth.

(a) Utemelji, da je sh injektivna povsod na  $\mathbb{R}$ , njena zaloga vrednosti oziroma definicijsko območje Arsh pa je  $\mathcal{Z}_{\operatorname{sh}} = \mathcal{D}_{\operatorname{Arsh}} = \mathbb{R}$ . Funkcija ch postane injektivna kot zožitev na  $[0, \infty)$  z zalogo vrednosti  $\mathcal{Z}_{\operatorname{ch}} = [1, \infty) = \mathcal{D}_{\operatorname{Arch}}$ , th pa je injektivna povsod na  $\mathbb{R}$  z zalogo vrednosti  $\mathcal{Z}_{\operatorname{th}} = (-1, 1) = \mathcal{D}_{\operatorname{Arth}}$ .

(b) Izpelji naslednji zvezi med hiperboličnimi funkcijami:

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1, \quad \operatorname{th}^2(x) = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}.$$

(c) Pokaži, da lahko area funkcije izrazimo z ostalimi elementarnimi funkcijami na naslednji način:

- $\operatorname{Arsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R},$
- $\operatorname{Arch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1,$

(d) Dokaži, da so odvodi hiperboličnih in njihovih inverznih funkcij enaki:

- $(\operatorname{sh}x)' = \operatorname{ch}x$ ,
- $(\operatorname{Arch}x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ,
- $(\operatorname{ch}x)' = \operatorname{sh}x$ ,
- $(\operatorname{Arsh}x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ,

5. Dana je funkcija  $g(x) = \frac{x^3}{3}$ .

- (a) Določi tangento in normalo na graf funkcije  $g$  v točki  $(-3, -9)$ .
- (b) Poišči vse tangente na graf funkcije  $g$ , ki so vzporedne premici  $y = 4y - 2$ , ter tudi vse tangente, ki sekajo  $x$ -os pod kotom  $\frac{\pi}{4}$ .
- (c) Določi koeficient premice  $y = kx - 18$ , da bo ta tangenta na graf funkcije  $g$ .

6. Določi tangente na dano krivuljo v točkah  $(1, y_1)$ , ter poišči točke  $(x_2, y_2)$  na krivuljah, v katerih imajo tangente koeficient enak 2:

- (a)  $y = e^{2x}$ , ( $\mathbb{R}$ :  $y = 2x - 2 + e^2$ ,  $(0, 1)$ )
- (b)  $2y = 1 + xy^3$ . ( $\mathbb{R}$ :  $y'(2 - 3xy^2) = 1$ ,  $(\frac{2}{3}, \frac{3}{4})$ )

(Nasvet: Odvod implicitno podane funkcije v ustrezni točki lahko izračunaš tako, da odvajaš njeno enačbo.)

7. Pokaži, da se krivulji  $x^2 - y^2 = a$  in  $xy = b$  sekata pravokotno za vsak  $a, b \in \mathbb{R}$ .

8. V trenutku  $t = 0$  začnemo opazovati prevoženo pot nekega avtomobila v odvisnosti od časa  $t$ . Opišemo jo s funkcijo  $s(t) = t(t - 2)^2$ .

- (a) Kako se v odvisnosti od časa  $t$  spreminjata hitrost  $v(t) = s'(t)$  in pospešek  $a(t) = v'(t)$  avtomobila?
- (b) Kdaj avto vozi naprej in kdaj vzvratno? Kdaj pospešuje in kdaj zavira? (Nasvet: Premisli, kaj nam predznak hitrosti oziroma pospeška pove o smeri vožnje oziroma o pospeševanju.)

9. Pri parametrih  $a$  in  $b$  je dana funkcija

$$(a) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ 2bx + a, & 0 < x \leq 1 \\ x^2 - x + 2, & x > 1 \end{cases},$$

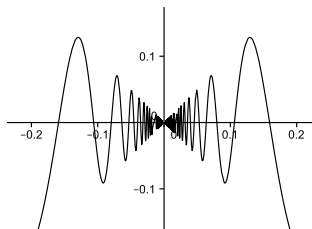
$$(b) f(x) = \begin{cases} a \arctan(x), & x \leq 0 \\ \frac{\sin(\frac{\pi}{x+1})}{1 - \ln(1+x)}, & 1 \geq x > 0 \\ x + b, & x > 1 \end{cases}.$$

Določi  $a$  in  $b$ , da bo funkcija  $f$  zvezna v točkah  $x = 0$  in  $x = 1$ ? Ali je potem funkcija v teh dveh točkah zvezno odvedljiva? Kako geometrijsko izgleda graf funkcije v teh dveh točkah? Ali je funkcija v teh dveh točkah morda dvakrat odvedljiva? (Nasvet:

Izračunaj leve in desne odvode funkcije  $f$  v točkah  $x = 0$  oziroma  $x = 1$ , kjer je to mogoče, ter jih ustrezno primerjaj.)

10. Določi parametre  $a$ ,  $b$ ,  $c$  in  $d$  tako, da bodo naslednje funkcije zvezno odvedljive povsod; zapiši še predpis odvoda  $f'$ :

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(2x) + a, & x \leq 0 \\ be^{1-x^2} + cx, & 0 \leq x \leq 1 \\ \sin(\frac{\pi x}{2}) + d, & x > 1 \end{cases},$$



11. Dane so funkcije

$$(a) f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad (b) f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2}, & x \leq 0 \\ x^3 \sin(\frac{1}{x}), & x > 0 \end{cases},$$

Ali je funkcija  $f$  odvedljiva oziroma zvezno odvedljiva? Ali je morda obstaja tudi drugi odvod funkcije  $f$  oziroma ali je zvezen? Če je kateri izmed odgovorov pritrديل, ustrezni odvod tudi zapiši. (Nasvet: Ustrezne odvode v točki  $x = 0$  izračunaj po definiciji.)

12. Izračunaj višje odvode funkcij

$$(a) f(x) = 2^x, \\ (b) f(x) = \frac{1}{2x+1},$$

(Nasvet: Izračunaj prvih nekaj odvodov in na podlagi tega ugani formulo za  $n$ -ti odvod, ki jo nato z indukcijo dokaži.)