Vaje MA - Odvod - Rolleov, Lagrangeov, L'Hopitalov izrek

1. Ali lahko uporabiš Rolleov izrek za funkcijo $f(x) = x^7 - 2x^2 - x + 4$ na intervalu $[-1, 1]$. Če je odgovor pritrdilen, ga zapiši.

2. Dana je zvezna funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, ki je odvedljiva na intervalu (a, b) in osemkrat zavzame isto vrednost (npr. 2). Z uporabo Rolleovega izreka dokaži, da ima potem odvod funkcije f' na intervalu (a, b) vsaj sedem ničel. Ali lahko rezultat posplošiš na funkcijo z n ničlami, t.j. ugotovi in utemelji, najmanj koliko ničel ima odvod g', če ima g natanko n ničel? Ali velja morda tudi obratno?

3. Dana je funkcija $f(x) = \ln(x)$.

   (a) Zapiši trditev Lagrangeovega izreka na intervalu $[3, 4]$.

   (b) Zapiši trditev Lagrangeovega izreka za funkcijo f na intervalu $[a, a+1]$, kjer $a > 0$. S pomočjo dobljenega nato dokaži neenakost:

   $$\frac{1}{1+a} < \ln(1 + \frac{1}{a}) < \frac{1}{a}, \qquad a > 0.$$

   (c) S pomočjo zgoraj dokazane neenakosti dokaži, da je zaporedje $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)$ padajoče. Z indukcijo tudi ni težko pokazati $a_n > \ln(1 + \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$, od koder sledi, da je a_n konvergentno, imiti zaporedja pravimo Eulerjeva konstanta γ. Ali je γ racionalno ali iracionalno število je zelo znan odprt problem.

4. Dana je odvedljiva funkcija $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$. Dokaži naslednje trditve:

   (a) Če je $f'(x) \neq 0$ za vse $x \in (a, b)$, potem je f injektivna.

   (b) Dokaži, da za vsako odvedljivo funkcijo $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, katere graf vsaj dvakrat seka premico $y = 2x - 1$, t.j $f(x_1) = 2x_1 - 1$, $f(x_2) = 2x_2 - 1$ za neka različna $x_1, x_2 \in (a, b)$, obstaja taka točka $\xi \in (a, b)$, za katero je $f'(\xi) = 2$.
   (Nasvet: Pomagaj si z Lagrangeovim izrekom.)

5. S pomočjo odvoda dokaži:

   (a) $\arctan(x) = \arcsin(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}), \qquad x \in \mathbb{R}$,

   (b) $\mathrm{Arsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

6. Dokaži, da velja: $|\sin(2x) - \sin(2y)| \leq 2\,|x - y|, \qquad x, y \in \mathbb{R}$,

7. S pomočjo L'Hopitalovega pravila ali kako drugače izračunaj naslednje limite:

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+x-2}{e^x}$,

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}$,

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{arctg}(2x)}{4x}$,

(d) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}$,

(e) $\lim_{x\to 3} \frac{\arcsin(x-3)}{x^2-3x}$,

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{(\sin x)^2}$,

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\mathrm{arctg}(x)}{x^3}$,

(h) $\lim_{x\to 0} x(\ln(x))^3$,

(i) $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

8. Dane so funkcije:

(a) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ \frac{\ln(2x-1)}{2x-2}, & 1 < x \end{cases}$,

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{\arctan(x)-x}, & x < 0 \\ x^2 - \frac{1}{2}, & 1 \geq x > 0 \\ 2\ln(x) + \frac{1}{2}, & x > 1 \end{cases}$.

Poišči vse točke zveznosti funkcije f, ter vse točke, kjer je funkcija odvedljiva. Določi še $\lim_{x\to\infty} f(x)$, če obstaja.
(Nasvet: Nekatere odvode je potrebno izračunati po definiciji.)

9. Pri realnih parametrih a, b in c sta dani funkciji

(a) $f(x) = \begin{cases} \ln(2+x), & -2 < x < 0 \\ ax^2 + bx + c, & 1 \geq x \geq 0 \\ \frac{x\ln(x)-x+1}{(x-1)\ln(x)}, & x > 1 \end{cases}$, ,

(b) $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{x^2+1}, & x > 1 \\ ax^2 + bx + c, & 1 \geq x \geq 0 \\ \frac{x-\sin(x)}{x^3}, & x < 0 \end{cases}$.

Določi parametre a, b in c tako, da bo funkcija zvezna povsod, kjer je definirana, ter odvedljiva povsod, razen morda v eni točki. Ali je funkcija f v tem primeru morda odvedljiva povsod? (Nasvet: Ustrezne leve oziroma desne odvode izračunaj po definiciji.) Izračunaj še limiti $\lim_{x\to\infty} f(x)$ in $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, če obstajata.

10. Pri realnih parametrih a in b so dane funkcije

(a) $f(x) = \begin{cases} a\cos(2x) + 1, & x < -\pi \\ \frac{1}{3}x + b, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}, & x > 0 \end{cases}$,

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{\arctan(x)-x}, & x < 0 \\ \frac{\sin(\pi x)}{e^x}, & 1 > x \geq 0 \\ ax + b, & x \geq 1 \end{cases}$,

- Določi parametra a in b, da bo funkcija f zvezna povsod, kjer je definirana. Pri dobljenih a in b poišči vse točke, kjer je funkcija odvedljiva.

- Ali je funkcija f pri kakšni izbiri parametrov a in b odvedljiva v točki $x = 0$? (Nasvet: Desni odvod v točki $x = 0$ izračunaj po definiciji.)

11. Ali obstaja realno število a, pri katerem lahko za izračun limite uporabiš L'Hopitalovo pravilo: $\lim_{x\to 1} \frac{e^x + e^{-2x+3} + a}{\ln(x)}$, Če je odgovor pritrdilen, potem pri ustreznem a limito tudi izračunaj.