

## Vaje MA - Odvod - Ekstremalni problemi in grafi funkcij

1. Dane so funkcije

(a)  $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 4$  na intervalu  $[-\frac{5}{2}, 2]$ ,

(b)  $f(x) = x(\ln x)^2$  na intervalu  $(0, e]$ ,

(c)  $f(x) = x - \cos(2x)$  na intervalu  $[0, \pi]$ .

- Določi maksimum in minimum danih funkcij na danih intervalih.
- Določi intervale strogega naraščanja in padanja danih funkcij. S pomočjo ugotovljenega nato klasificiraj lokalne ekstreme oziroma določi prevoje funkcij.

2. Babica Francka želi imeti zelenjavni vrt pravokotne oblike, ki bo tik ob eni izmed sten njene hiše. (Ograditi je treba le tri stranice.) Kakšnih dimenzij naj bo vrt, da bo

(a) njegova površina največja, ter bo zanj zadostovalo 10 metrov ograje?

(b) njegova površina enaka  $10 \text{ m}^2$ , ter bo zanj potrebno najmanj ograje?

3. Krogli s polmerom  $R$  včrtaj pokončni valj in pokončni stožec z največjo prostornino.

4. Danemu liku včrtaj tak pravokotnik s stranicami, vzporednimi koordinatnim osem, ter tak enakokrak trikotnik z ogliščem v  $(0, 0)$  in osnovnico, vzporedno z  $x$ -osjo, da bo njuna ploščina maksimalna:

(a) elipsa z enačbo  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ,

(b) lik, ki ga omejujeta parabola  $y = 3 - x^2$  in  $x$ -os omejujeta.

5. Bistri Mihec svetuje tovarnam, kakšne morajo biti dimenzije izdelkov oziroma objektov, da bo njihova izdelava najcenejša. Kaj bi Mihec svetoval pri izdelavi

(a) lonca brez pokrova v obliki valja za 10 litrov juhe. (Debelino lonca lahko zanemarimo.)

(b) kartonaste škatle s pokrovom iz lepenke, ki so oblike kvadra s kvadratnim dnom in volumnom  $2 \text{ dm}^3$ , pri čemer je cena  $1 \text{ dm}^2$  kartona 1 cent, cena  $1 \text{ dm}^2$  lepenke pa 2 centa. silos za za  $1000 \text{ m}^3$  žita v obliki valja s sferno kupolo, pri čemer je cena materiala za kupolo dvakrat večja od cene materiala za valjasti del silosa.

6. Dane so funkcije

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} \quad f(x) = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 5, & \text{(d)} \quad h(x) = \frac{1+\ln(x)}{\sqrt{x}}, \\
\text{(b)} \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{x-1}, & \text{(e)} \quad g(x) = \frac{1}{x} + 2\operatorname{arctg}(x), \\
\text{(c)} \quad f(x) = x^2e^{-x} + 1, & \text{(f)} \quad h(x) = e^{\sin(x)}.
\end{array}$$

- Danim funkcijam določi definicijsko območje, ničle, pole, asimptote in razišči obnašanje na robu definicijskega območja.
- Poišči intervale naraščanja in padanja, lokalne ekstreme, ter zalogo vrednosti danih funkcij.
- Določi intervale konveksnosti in konkavnosti, ter prevoje. (Če ne gre v splošnem, potem poišči vsaj kakšno točko, v okolici katere je funkcija  $f$  konveksna oziroma konkavna.)
- Čimbolj natančno skiciraj graf funkcije.

7. V implicitni, parametrični oziroma v polarni obliki so podane naslednje krivulje:

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, & \text{(elipsa),} \\
\text{(b)} \quad x(t) = \pm 4\operatorname{ch}(t), \quad y(t) = 3\operatorname{sh}(t), \quad t \in \mathbb{R}, & \text{(hiperbola), (Nasvet: Opazi, da} \\
& \text{dana krivulja zadošča enačbi hiperbole } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1). \\
\text{(c)} \quad x(t) = t^2 - 1, \quad y(t) = t(t^2 - 1), \quad t \in \mathbb{R}, & \\
\text{(d)} \quad x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad a > 0, & \text{(cikloda),} \\
\text{(e)} \quad x(t) = \sin(2t), \quad y(t) = \sin(t), \quad t \in \mathbb{R}, & \\
\text{(f)} \quad r(\varphi) = \frac{a}{\varphi}, \quad \varphi \in \mathbb{R}^+, & \text{(hiperbolična spirala), (Nasvet: Opazi, da je } \lim_{\varphi \rightarrow \infty} r(\varphi) = \\
& 0, \lim_{\varphi \rightarrow 0} y(\varphi) = a, \lim_{\varphi \rightarrow 0} r(\varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow 0} x(\varphi) = \infty.) \\
\text{(g)} \quad r(\varphi) = a(1 + \cos(\varphi)) & \text{(kardioida),} \\
\text{(h)} \quad r(\varphi) = \cos(3\varphi). &
\end{array}$$

Čimbolj natančno nariši dane krivulje. (Nasvet: Pri nekaterih parametrično oziroma polarno podanih krivuljah skiciraj grafa  $x(t)$  in  $y(t)$  oziroma  $r(\varphi)$ ,  $x(\varphi)$  in  $y(\varphi)$ , ter poskusi določiti ekstremne točke, t.j. reši enačbi  $\dot{x} = 0$  in  $\dot{y} = 0$ . Izračunaj naklon krivulje oziroma  $y'$ .)