

Vaje MA - Nedoločeni integral

1. Nedoločeni integral katere funkcije f je dana funkcija F :

(a) $F(x) = \sqrt[3]{1 + \cos(\ln x)}$,

(b) $F(x) = e^{x^2} \operatorname{arctg}(x)$,

2. Izračunaj naslednje nedoločene integrale:

(a) $\int (2x^4 + x + 2x^{-3} + x^{-1} + 2) dx$,

(b) $\int (\sqrt[3]{x\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x}) dx$,

(c) $\int \cos(7x + \frac{\pi}{8}) dx$.

3. S pomočjo uvedbe nove spremenljivke izračunaj naslednje nedoločene integrale:

(a) $\int (2x + 1)^{19} dx$,

(e) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$,

(b) $\int 3x \cos(x^2) dx$,

(f) $\int \frac{\sin(x) \cos^2(x)}{\cos(x)+2} dx$,

(c) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x+1}} dx$,

(g) $\int \frac{\sin^3(x) + \sin(x) \cos^4(x)}{\sqrt[3]{\cos(x)}} dx$,

(d) $\int \frac{\ln(x)+1}{x \sqrt[3]{\ln(x)}} dx$,

(h) $\int \sqrt{x^2 - 4} dx$,

4. S pomočjo integracije 'per-partes' izračunaj naslednje integrale:

(a) $\int x e^x dx$,

(c) $\int (2x - 3) \ln(x + 1) dx$,

(b) $\int (4x - 1) \sin(6x) dx$,

(d) $\int (x^2 - 3x + 1) e^{-2x} dx$,

5. Izračunaj nedoločene integrale naslednjih racionalnih funkcij:

(a) $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 2}{x-1} dx$,

(g) $\int \frac{4x}{x^2+1} dx$,

(b) $\int \frac{x^4 + x^2 + 3}{1+x^2} dx$,

(h) $\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx$,

(c) $\int \frac{x+7}{x^2-x-2} dx$,

(i) $\int \frac{4x+3}{x^2+2x+2} dx$,

(d) $\int \frac{2}{(x-1)(x+1)^2} dx$,

(j) $\int \frac{3x^2+4x-1}{(x^2+2x+3)(2x+1)} dx$,

(e) $\int \frac{dx}{2+8x^2}$,

(k) $\int \frac{x-11}{(x^2+4)(x-1)} dx$,

(f) $\int \frac{2}{x^2+2x+2} dx$,

(l) $\int \frac{2x^2+5x+8}{x^3+4x^2+5x} dx$,

6. Naj bo $u = \tan(\frac{x}{2})$. Pokaži, da potem velja $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ in $dx = \frac{2du}{1+u^2}$, ter izračunaj naslednje integrale:

$$(a) \int \frac{2}{3+5\cos x} dx,$$

$$(b) \int \frac{2}{1+\cos x+\sin x} dx.$$

7. Izračunaj naslednje nedoločene integrale:

$$(a) \int \frac{e^{2x}-2}{e^x+1} dx,$$

$$(d) \int x \arctan(2x) dx,$$

$$(b) \int \frac{(\ln x)^2}{x(1+(\ln x)^2)} dx,$$

$$(e) \int e^{\sqrt{x}} dx,$$

$$(c) \int \frac{\cos x}{(\sin x)^2-4} dx,$$

$$(f) \int \cos(\ln(x)) dx.$$

8. Dan je nastavek

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{a+bx+x^2}} dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{a+bx+x^2} + A \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}},$$

kjer sta $P_n(x)$ oziroma $Q_{n-1}(x)$ polinoma stopnje n oziroma $n-1$ in A , a ter b realne konstante.

(a) Poišči realni konstanti A in B , da bo veljalo

$$\int \frac{5x-11}{\sqrt{5-2x-x^2}} dx = A\sqrt{5-2x-x^2} + B \int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-x^2}},$$

ter izračunaj nedoločeni integral $\int \frac{5x-11}{\sqrt{5-2x-x^2}} dx$.

(b) Izračunaj nedoločeni integral $\int \frac{x^3+4x^2}{\sqrt{x^2+4}} dx$.

9. Dokaži, da ne obstaja nedoločeni integral funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$