

## Vaje MA - Določeni integral

1. Dana je funkcija

(a)  $f(x) = x^2$ ,

(b)  $f(x) = x^3$ .

- Naj bo  $\mathcal{D}$ :  $0 < \frac{1}{2} < 1 < \frac{5}{4} < \frac{8}{5} < 2$  delitev intervala  $[0, 2]$ . Zapiši zgornjo in spodnjo Darbouxjevo vsoto funkcije  $f$  za dano delitev  $\mathcal{D}$ , ter ju izračunaj. Kaj geometrijsko predstavljata vsoti?

- Za poljuben  $n \in \mathbb{N}$  naj bo  $\mathcal{D}_n$ :  $0 < \frac{2}{n} < \frac{4}{n} < \dots < \frac{2n-2}{n} < 2$  delitev intervala  $[0, 2]$ . Zapiši zgornjo Darbouxjevo vsoto  $S(\mathcal{D}_n)$  in spodnjo Darbouxjevo vsoto  $s(\mathcal{D}_n)$  funkcije  $f$  pri dani delitvi  $\mathcal{D}_n$ . Razmisli, zakaj obstajata limiti zaporedij  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(\mathcal{D}_n)$  in  $\lim_{n \rightarrow \infty} s(\mathcal{D}_n)$ , ter ju izračunaj? Koliko pa je  $\int_0^2 f(x)dx$ ?

(Nasvet: Lahko si pomagaš z integralskim računom ali pa s formulama  $\sum_{j=1}^n j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$  in  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .)

2. Dana je funkcija  $f(x) = \frac{1}{1+2x}$ .

- Izračunaj zgornjo in spodnjo Darbouxjevo vsoto funkcije  $f$  za naslednjo delitev intervala  $[0, 3]$ :  $0 < 1 < \frac{5}{4} < \frac{3}{2} < \frac{7}{4} < \frac{15}{8} < 2 < \frac{8}{3} < 3$ . Kaj geometrijsko predstavljata dobljeni vsoti? Vsoti po velikosti primerjaj še z  $\int_0^3 f(x)dx$ .
- Za  $n \in \mathbb{N}$  naj bo  $\mathcal{D}'_n$ :  $0 < 1 < 2 < \dots < n-1 < n$  delitev intervala  $[0, n]$ . Zapiši zgornjo in spodnjo Darbouxjevo vsoto funkcije  $f$  pri dani delitvi  $\mathcal{D}'_n$ . S katero številsko vrsto sta povezani? Po velikosti ju primerjaj z določenim integralom  $\int_0^n f(x)dx$ , ter s pomočjo ugotovljenega oceni  $n$ -to delno vsoto.

3. Dana je funkcija  $g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ .

- Naj bo  $\mathcal{D}$ :  $-1 < -\frac{2}{3} < \frac{1}{2} < 1 < 2$  delitev intervala  $[-1, 2]$ . Izračunaj zgornjo in spodnjo Darbouxjevo vsoto funkcije  $g$  za dano delitev  $\mathcal{D}$ .
- Direktno po definiciji pokaži (t.j. z Darbouxjevimi vsotami), da je funkcija  $g$  integrabilna na intervalu  $[-1, 2]$ , ter izračunaj  $\int_{-1}^2 g(x)dx$ .

(Nasvet: Poskusi najti kakšno oceno za Darbouxjeve vsote, lahko pa si pomagajš z delitvami  $-1 < -\frac{n-1}{n} < \dots < -\frac{1}{n} < 0 < \frac{2}{n} < \frac{4}{n} < \dots < \frac{2n-2}{n} < 2$ .)

4. Dana je funkcija

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

- (a) Zapiši zgornjo in spodnjo Darbouxjevo vsoto funkcije  $f$  za delitev intervala  $[0, 2]$ :  $0 < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < 1 < \frac{3}{2} < 2$ .
- (b) Direktno po definiciji pokaži (t.j. z Darbouxjevimi vsotami), da naslednja funkcija ni integrabilna na nobenem zaprtem intervalu. (Nasvet: Upoštevaj, da lahko na vsakem intervalu najdemo tako racionalno kot iracionalno število.)

5. Dana je funkcija  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  in delitev  $\mathcal{D}: a = x_0 < \dots < x_n = b$ .

- (a) V posebnem primeru, ko so podintervali delitve enako veliki (t.j.  $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$  za vse  $i \in \{1, \dots, n\}$ ) vpelji (*trapezna formula*):

$$T(\mathcal{D}, f) = \frac{b-a}{2n}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)).$$

Vsoto  $T(\mathcal{D}, f)$  po velikosti primerjaj z Darbouxjevima vsotama dane delitve. Kaj geometrijsko predstavlja zgornja vsota?

- (b) Izračunaj  $T(\mathcal{D}, f)$  za funkcijo  $f(x) = e^{-x^2}$  in delitev intervala  $[0, 1]$  na šest enakih podintervalov,  $\mathcal{D}: 0 < \frac{1}{6} < \frac{2}{6} < \frac{3}{6} < \frac{4}{6} < \frac{5}{6} < 1$ .

6. Dokaži, da so naslednje funkcije odvedljive in izračunaj njihove odvode:

(a)  $F(x) = \int_2^{-2x} e^{-t^3} dt, \quad x \in [2, 4],$

(b)  $F(x) = \int_0^{x^2} \sin(t^2) dt,$

(Nasvet: Spomni se, da je funkcija  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  odvedljiva, ter velja  $F'(x) = f(x)$ , če je  $f$  zvezna. Vpelji še ustrezno novo spremenljivko ali zapiši  $F$  kot ustrezní kompozitum funkcij  $F(x) = (G \circ g)(x)$ , ter odvajaj po verižnem pravilu.)

7. Izračunaj določeni integral  $\int_0^2 f(x) dx$ , kjer je

$$f(x) = \begin{cases} xe^{1-x^2}, & x \leq 1 \\ \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), & x > 1 \end{cases}.$$

8. Utemelji, zakaj so naslednji integrali posplošeni in jih izračunaj, če lahko:

(a)  $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x-1},$

(c)  $\int_0^1 \frac{dx}{x(3-\ln x)^2},$

(b)  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(\ln x)^2},$

(d)  $\int_1^{\infty} \frac{2dx}{x^2-4x+5} dx,$

9. Razišči konvergenco oziroma obstoj naslednjih posplošenih integralov:

(a)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{2x + \sqrt[3]{x^2}},$

(c)  $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^2} dx,$

(b)  $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx,$

(d)  $\int_0^{\infty} \frac{\arctg(x)}{(x+2)^3} dx,$