

Vaje MA - Funkcijska zaporedja in vrste

1. Dana so naslednja funkcijska zaporedja:

(a) $f_n(x) = x(1 + \frac{1}{n})$,

(d) $f_n(x) = xe^{-nx}$,

(b) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$,

(e) $h(x) = \frac{1}{n}e^{-n^2x^2}$,

(c) $f_n(x) = \frac{nx^2+1}{nx+1}$, $x \in [0, \infty)$,

(f) $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$.

- Ugotovi, ali dano zaporedje funkcij konvergira po točkah oziroma enakomerno, ter izračunaj limito $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, če obstaja.
- Ali zaporedje odvodov $f'_n(x)$, če obstajajo, konvergira po točkah oziroma enakomerno? Če je odgovor pritrdilen, poišči tudi limito. Ali je enaka odvodu limitne funkcije zaporedja f_n ?
- Ali konvergira zaporedje integralov $\int_0^1 f_n(x)dx$, t.j. ali obstaja limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x)dx$; je morda enaka $\int_0^1 (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))dx$? Kaj pa zaporedje $\int_0^\infty f_n(x)dx$?

2. Določi konvergenčne polmere oziroma območja konvergence naslednjih potenčnih vrst oziroma funkcijskih vrst (razišči tudi konvergenco na robu območij):

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} (x-2)^n$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{10^n}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

Razišči tudi enakomerno konvergenco danih funkcijskih vrst, ter poskusi določiti vsoto katere od vrst.

3. Naslednje funkcije razvij v Taylorjeve vrste okoli točke $x = a$, določi območja konvergence dobljenih vrst in izračunaj $f^{(2016)}(a)$ in $f^{(2017)}(a)$:

(a) $f(x) = 1 - \cos(2x)$ okoli točke $a = 0$,

(b) $h(x) = x^2 \cos(2x)$ okoli točke $a = 0$,

(c) $g(x) = e^{3x} - e^{\frac{x}{2}}$ okoli točke $a = 0$,

(d) $f(x) = xe^{2x}$ v Taylorjevi vrsti okoli točk $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ in $a_3 = 2$,

(e) $f(x) = \ln(x)$ okoli točk $a_1 = 1$ in $a_2 = 2$,

(f) $f(x) = \ln(2+x)$ okrog točke $a = -1$,

(g) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ okoli točk $a_1 = 0$ in $a_2 = 1$,

(h) $f(x) = \frac{1}{2+x}$ okrog točk $a_1 = 0$ in $a_2 = 1$

(i) $r(x) = \frac{1}{x^2-x}$ v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = -1$

(j) $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ okrog točke $a = 0$.

4. Z uporabo Taylorjeve vrste do členov tretjega reda izračunaj približne vrednosti in oceni napako zapisanega približka:

(a) $0,99^{12}$,

(b) $e^{0.02}$,

5. S pomočjo Taylorjeve formule oziroma razvoja v Taylorjevo vrsto izračunaj naslednje limite:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin(x) - \sin(5x)}{x^2 \sin x}$,

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{1 - \cos(2x)}$,