Funkcije več spremenljivk

Pedagoška fakulteta v Ljubljani

Ljubljana, 2020

0.1 Vaje1

Definicija metrike in metričnega prostora, Evklidska (standardna) metrika na $\mathbb{R}^n$, odprta krogla.

1. Dokaži, da je s predpisom $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ definirana metrika na $\mathbb{R}^2$. V tej metriki nariši odprto kroglo $K((0,0),1)$.
2. Dokaži, da je s predpisom $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ definirana metrika na $\mathbb{R}^2$. V tej metriki nariši odprto kroglo $K((0,0),1)$.
3. Dokaži, da je s predpisom $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |\log \frac{x_2}{x_1}| + |\log \frac{y_2}{y_1}|$ definirana metrika na $(\mathbb{R}^+)^2$. V tej metriki nariši odprto kroglo $K((1,1),1)$.
4. Naj bo
$$q(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$
Dokaži, da je s predpisom $d(x, y) = |\log \frac{x_2}{x_1}| + |\log \frac{y_2}{y_1}|$
$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & , q(x) = q(y) \\ |x - y| + 1 & , q(x) \neq q(y) \end{cases}$$
definirana metrika na $\mathbb{R}$. V tej metriki nariši odprto kroglo $K(0, \frac{3}{2})$.

0.2 Vaje2 in Vaje3

Ponovitev definicij: notranja točka, zunanja točka, robna točka, odprta množica, zaprta množica.

1. Po definiciji dokaži, da sta naslednji množici odprti:
   (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$,
   (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, y < 2\}$.
2. Za vsako od naslenjih množic zapiši, kaj so njene notranje, zunanje in robne točke. Ali je katera od množic odprta ali zaprta?
   (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x \leq 3, \quad y = 0\}$,
   (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, \quad y \geq 0\}$,
   (c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$.
   (d) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$
   (e) $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$
   (f) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, 0 \leq y < 1\}$.
3. Naloga 8.32 iz MATHEMATICAL ANALYSIS – EXERCISES

0.3 Vaje4

Ponovitev definicij: Kompaktnost, Limite

1. Preveri ali so naslendje množice kompaktne (v evklidski metriki):

   (a) $\mathbb{R} \times I \subset \mathbb{R}^2$

   (b) $I \times I \subset \mathbb{R}^2$

   (c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$,

   (d) Naj bo $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$ graf funkcije, kjer je:

      i. $D_f = \mathbb{R}$ in f zvezna,

      ii. $D_f = I$ in f zvezna,

      iii. $D_f = I$ in f ni zvezna.

   (e) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$

2. Določi (in skiciraj) definicijsko območje naslednjih funkcij

   (a) $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$

   (b) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 + y^2}$

   (c) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

   (d) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

   (e) $f(x, y) = \log(y^2 - 4x + 8)$

3. Za dani funkciji

   (a) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$

   (b) $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$

   preveri ali obstajajo naslednje limite.

   (i) $\lim_{x \to 0} f(x, x)$,

   (ii) $\lim_{x \to 0}(\lim_{y \to 0} f(x, y))$,

   (iii) $\lim_{y \to 0}(\lim_{y \to 0} f(x, y))$,

   (iv) $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$.

0.4 Vaje5

Ponovitev definicij: Zveznost

1. Naj bo $f(x, y)$ zvezna funkcija na $\mathbb{R}^2$. Dokaži, da je možica $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) > 0\}$ odprta.

2. Po definiciji preveri ali funkcija zvezna v dani točki. Določi območje, kjer je funkcija zvezna.

   (i) $f(x, y) = 7$, $p = (0, 0)$

(ii) $f(x,y) = x + y$, $p = (3,5)$

(iii) $(x,y) = \frac{x}{y}$, $p = (0,3)$

(iv) $f(x,y) = \begin{cases} x & , x = y \\ 0 & , \text{sicer} \end{cases}$, $p = (0,0)$ $q = (2,0)$

3. Obravnavaj zveznost naslednjih funkcij.

(i) $f(x,y) = xy \log(x^2 + y^2)$

(ii) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{sicer} \end{cases}$

(iii) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2 - y^2)^2}{x^2 + y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{sicer} \end{cases}$

(iv) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{sicer} \end{cases}$