1	
2	
3	
4	
Σ	

Izbrana poglavja iz analize: 1. kolokvij

12. 4. 2019

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 50 točk. Veliko uspeha.

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (10 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo napiši, ali je izjava pravilna (P), ali napačna (N).

☐ Če je množica $A \subset \mathbb{R}^n$ zaprta, ima vsako zaporedje iz A stekališče v A.

☐ Če je množica $A \subset \mathbb{R}^n$ omejena in zaprta, potem je kompaktna.

☐ Zvezna funkcija ima na kompaktni množici vedno globalni maksimum.

☐ Če množica $A \subset \mathbb{R}^n$ ni zaprta, potem je odprta.

☐ Zaprtje množice $A \subset \mathbb{R}^n$ dobimo tako, da množiic A dodamo vse robne točke: $\overline{A} = A \cup \partial A$.

☐ Če je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ razreda $\mathcal{C}^2$, potem velja $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

☐ Če ima $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v neki točki smerni odvod v poljubni smeri, potem je v tej točki diferenciabilna.

☐ Če je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v neki točki parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah, potem je v tej točki zvezna.

☐ Če je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v neki točki diferenciabilna, potem je v tej točki zvezna.

☐ Naj bo (a, b) stacionarna točka funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in naj bo determinanta Hessejeve matrike funkcije f v točki (a, b) strogo negativna. Potem f v (a, b) nima lokalnega ekstrema.

2. naloga (15 točk)

a) (5) Natančno napiši, kdaj je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciabilna v točki $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

b) (10) Naj bo

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{y}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Obravnavaj zveznost (natančno povej, kje je funkcija zvezna in kje ne) in parcialno odvedljivost funkcije f (natančno povej, v katerih točkah je funkcija parcialno odvedljiva in v katerih ne, ter povsod, kjer parcialni odvodi obstajajo, jih tudi izračunaj). Ali je f diferenciabilna v izhodišču (če da, dokaži, če ne, povej, zakaj ne).

3. naloga (10 točk)

Naj bo $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + xyz + z^2 - ye^z$.

a) (5) Pokaži, da točka $T(2, 1, 0)$ leži na nivojnici $f(x, y, z) = 4$ in zapiši enačbo tangentne ravnine v točki T na to nivojnico.

b) (5) Napiši Taylorjevo aproksimacijo do drugega reda za funkcijo f v točki $(0, 0, 0)$.

4. naloga (15 točk)

a) (5) Naj bo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija. Natančno napiši zadosten pogoj, da ima f v neki točki $a \in \mathbb{R}^n$ lokalni minimum.

b) (10) Poišči in klasificiraj lokalne ekstreme za funkcijo

$$f(x, y) = 2x^3 + 9xy^2 + 15x^2 + 27y^2.$$