1	
2	
3	
4	
5	
6	
Σ	

Funkcije več spremenljivk: 2. kolokvij in 1. izpit

Čas pisanja je 90 minut. Za izpit rešujete naloge 1,2,3 in 4, za kolokvij pa naloge 1,4,5,6. Možno je doseči 50 točk. Veliko uspeha.

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (10 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo napiši, ali je izjava pravilna (P), ali napačna (N).

☐ Množica $A \subset \mathbb{R}^n$ je odprta natanko tedaj, ko ne vsebuje nobene svoje robne točke.

☐ Vsaka $\mathcal{C}^1$ funkcija ima kakšno stacionarno točko na kompaktni množici.

☐ Poljuben presek odprtih množic je odprta množica.

☐ Če je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ razreda $\mathcal{C}^1$, potem je f diferenciabilna v vsaki točki iz $\mathbb{R}^n$.

☐ Če je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v neki točki diferenciabilna, potem je v tej točki parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah.

☐ Hessejeva matrika $\mathcal{C}^2$ ima same realne lastne vrednosti.

☐ Če ima Hesejeva matrika $\mathcal{C}^2$ funkcije v stacionarni točki tako pozitivne kot tudi negativne lastne vrednosti, potem funkcija v tej točki nima lokalnega ekstrema.

☐ Omejena funkcija je vedno integrabilna na zaprtem kvadru $L \subset \mathbb{R}^n$.

☐ Vsaka zvezna funkcija je integrabilna na poljubni kompaktni množici $K \subset \mathbb{R}^n$.

☐ Če je f skalarno polje je $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$.

2. naloga (15 točk)

a) [**5**] Naj bo $f(x,y)$ funkcija dveh spremenljivk, definirana na $D \subset \mathbb{R}^2$, in $a = (a_1, a_2) \in D$ notranja točka. Natančno napiši definicijo parcialnega odvoda $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$.

b) [**10**] Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana kot

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin \frac{y}{x} & x \neq 0 \end{cases}$$

Pokaži, da je f zvezna in parcialno odvedljiva po obeh spremenljivkah. Natančno zapiši oba parcialna odvoda in preveri, da sta zvezna v točki $(0,0)$. Ali je f diferenciabilna v točki $(0,0)$?

3. naloga (15 točk)

a) [**5**] Naj bo f funkcija razreda $\mathcal{C}^1$, definirana na okolici zaprtja $\overline{D}$, kjer je $D \subset \mathbb{R}^2$ območje s kosoma gladkim robom in $\overline{D}$ kompakta množica. Napiši strategijo, kako poiščemo globalne ekstereme funkcije f na $\overline{D}$.

b) [**10**] Poišči globalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = (1+e^x)\cos y - xe^x$$

na območju $D = [-1,1] \times [-\pi/2, \pi/2]$.

4. naloga (10 točk)

Naj bo A trikotnik v ravnini z oglišči $(-1, 0)$, $(1, 0)$ in $(1, 1)$.

a) [**5**] Zapiši integral

$$\int_A y dx dy$$

kot dvojni integral v kartezičnih koordinatah in nato zamenjaj vrstni red integracije.

b) [**5**] Izračunaj zgornji integral.

5. naloga (15 točk)

a) [**5**] Napiši izrek o zamenjavi spremenljivk v Riemannovem integralu.

b) [**10**] Z uvedbo polarnih spremenljivk izračunaj integral

$$\int_D x^2 e^{x^2+y^2}\, dx dy,$$

kjer je $D = K(0,1)$ krog z radijem 1 is središčem v izhodišču.

6. naloga (15 točk)

a) [**5**] Preveri, da je polje $F(x, y, z) = (3x^2z - \sin x, z^2, x^3 + 2yz + e^z)$ potencialno polje.

b) [**10**] Poišči potencial zgornjega vektorskega polja.