1	
2	
3	
4	
5	
6	
Σ	

Funkcije več spremenljivk: 4. izpit

13. 9. 2019

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 50 točk. Veliko uspeha.

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (10 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo napiši, ali je izjava pravilna (P), ali napačna (N).

☐ Če je množica $A \subset \mathbb{R}^n$ je zaprta, potem je nujno omejena.

☐ Če je f zvezna na kompaktni množici $K \subset \mathbb{R}^n$, je f na K omejena.

☐ Vsaka $\mathcal{C}^1$ funkcija ima kakšno stacionarno točko na kompaktni množici.

☐ Poljubna unija odprtih množic je odprta množica.

☐ Če je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v neki točki parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah, potem je f v tej točki zvezna.

☐ Če je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v neki točki diferenciabilna, potem je v f v tej točki zvezna.

☐ Hessejeva matrika $\mathcal{C}^2$ funkcije je vedno simetrična.

☐ Če ima Hesejeva matrika $\mathcal{C}^2$ funkcije v stacionarni točki same pozitivne lastne vrednosti, ima funkcija v tej točki lokalni maksimum.

☐ Zvezna funkcija je vedno integrabilna na zaprtem kvadru $L \subset \mathbb{R}^n$.

☐ Vsaka zvezna funkcija je integrabilna na poljubni kompaktni množici $K \subset \mathbb{R}^n$, katere rob ima Lebesgueovo mero 0.

2. naloga (15 točk)

Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana kot

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & ; y = 0 \\ xy \sin \frac{x}{y} & ; y \neq 0 \end{cases}$$

Pokaži, da je f zvezna povsod. Natančo poglej, v katerih točkah obstajata parcialna odvoda $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $\frac{\partial f}{\partial y}$. Ali je f diferenciabilna v točki $(0,0)$?

3. naloga (15 točk)

a) [**5**] Naj bo f funkcija razreda $\mathcal{C}^1$, definirana na okolici zaprtja $\overline{D}$, kjer je $D \subset \mathbb{R}^2$ območje s kosoma gladkim robom in $\overline{D}$ kompaktna množica. Napiši strategijo, kako poiščemo globalne ektereme funkcije f na $\overline{D}$.

b) [**10**] Zapiši definicijsko območje funkcije

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$$

in poišči globalne ekstreme funkcije f na njenem definicijskem območju.

4. naloga (10 točk)

Naj bo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \, x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}$.

a) [**5**] Zapiši integral

$$\int_A xydxdy$$

kot dvojni integral v kartezičnih koordinatah in nato zamenjaj vrstni red integracije.

b) [**5**] Izračunaj zgornji integral z uvedbo polarnih spremenljivk.