

Vaje KomA - Kompleksna števila

1. Dano je kompleksno število $z = 3+4i$. Izračunaj oziroma določi realne in imaginarne dele naslednjih števil: $\frac{\bar{z}-2+2i}{2+i}$, $\operatorname{Im}\left(\frac{1-i}{|z|+1}\right)$.

2. V kompleksni ravnini skiciraj:

$$\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z - 1 + i| \leq 4, \operatorname{Im}(z) > -2\}.$$

3. Dano je oglišče $z_1 = \sqrt{3} + i$ pravilnega sedemkotnika s središčem v 0. Poišči še ostala oglišča tega sedemkotnika. (Števila je dovolj podati v polarni obliki.)

4. Kompleksna števila $-2-2i$ in $-1+i\sqrt{3}$ zapiši v polarni obliki, ter izračunaj njihove 2004. in 2015. potence in vse kubične ter pete korene.

5. Poišči vsa kompleksna števila $z \in \mathbb{C}$, ki rešijo enačbe

(a) $z^2 + (1 - i)z - i = 0$,

(b) $|z| + \bar{z} = 2 + i$.

(c) $\bar{z} = z^3$. (Nasvet: Pomagaj si s polarno obliko kompleksnega števila.)

6. Poišči limite oziroma stekališča kompleksnih zaporedij:

(a) $b_n = \frac{n+3i}{n(2+i)}$,

(b) $c_n = \frac{n+1}{n}(\cos(\frac{n\pi}{2}) + i \sin(\frac{n\pi}{2}))$,

(c) $d_n = n \cos(\frac{n\pi}{2}) + \frac{3n}{2n+1}i$.

7. Razišči konvergenco naslednjih vrst kompleksnih števil:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2} - \frac{i}{2})^n$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+in(-1)^n}{n^2}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$, $z \in \mathbb{C}$.

8. Opiši preslikavo $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, ki je podana s predpisom $f(z) = iz + 2$. Preslikavi f poišči še inverzno preslikavo, če obstaja.

9. Dana je funkcija $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$.

(a) Določi kompleksna števila z , ki se z f preslikajo v i , t.j. reši enačbo $\frac{z+1}{z-1} = i$. Poišči še inverzno funkcijo funkcije f , če obstaja, ter poišči števil, ki se z f preslikajo v $-i$, $1 + i$.

(b) Dokaži, da za števila $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ z absolutno vrednostjo 1, velja $\operatorname{Re}(f(z)) = 0$. (Slika enotske krožnice je na imaginarni osi.) Pokaži še, da je slika enotskega kroga brez roba pa na levi polravnini, t.j. negativni realni polravnini.