Vaje - Kompleksna analiza - Holomorfne funkcije

1. Dane so kompleksne funkcije
   (a) $f(z) = \frac{z}{z-i}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$,
   (b) $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (Poskusi s pomočjo definicije kompleksnega odvoda.)
   (c) $f(x+iy) = e^{x^2-y^2} + i(y\cos(2xy) - x\sin(2xy))$, $z \in \mathbb{C}$.

   - Ugotovi, ali je dana funkcija holomorfna oziroma poišči njen kompleksen odvod. (Nasvet: Pomagaj si z definicije kompleksnega odvoda ali s CR-sistemom enačb.)
   - Funkcije zapiši še v odvisnosti od x, y namesto $z, \bar{z}$ (ter po komponentah).
   - Določi $\frac{\partial f}{\partial z}$ in $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$.

2. Poišči konstanto a, da bo funkcija $f(x,y) = \log(x^2+y^2) + i\arctan\frac{axy}{x^2-y^2}$ holomorfna na svojem definicijskem območju. (R: $a = 2$.)

3. Poišči taki konstanti a in b, da bo funkcija $f(z) = \cos x(\mathrm{ch}y + a\mathrm{sh}y) + i\sin x(\mathrm{ch}y + b\mathrm{sh}y)$ povsod holomorfna. Funkcijo zapiši še z $z, \bar{z}$ namesto x, y. Za katero funkcijo gre? (R: $f(z) = e^{iz}$.)

4. Poiščite holomorfnono funkcijo, če poznate njen realni del $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ in veste, da je $f(0) = i$. Funkcije zapiši še z $z, \bar{z}$ namesto x, y.

5. Pokaži, da je $v(x,y) = e^x y\cos y + xe^x \sin y + 1$ harmonična na $\mathbb{C}$ in poišči vse harmonične konjugiranke fukcije v.

6. Pokaži, da sta realna komponenta $u(x,y)$ in imaginarna komponenta $v(x,y)$ holomorfne funkcije $f = u + iv$ harmonični funkciji. (Nasvet: Pomagaj si s CR-sistemom.)

7. Pokaži, da velja $4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \triangle f$.

8. Dokaži naslednje enakosti:
   (a) $e^{z+2\pi i} = e^z$,
   (b) $\sin(z) = \sin(-z)$,
   (c) $\cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z\sin w$,
   (d) $\mathrm{sh}(iz) = i\sin(z)$, $\qquad \mathrm{ch}(iz) = \cos z$.

(Opomba: $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ in $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, sh$z$ in ch$z$ pa sta definirana preko e^z z enakim predpisom kot v realnem primeru.)

9. Kako e^z preslika daljici $\{z = iy \mid 2\pi \le y \le 4\pi\}$, $\{z = 2 + iy \mid 0 \le y \le 2\pi\}$ in premico $\{z = x + i\frac{\pi}{4} \mid x \in \mathbb{R}\}$?

10. Izračunaj e^i, $\log i$, $\sin i$, $\cos(i + \frac{\pi}{2})$, i^i.
(Opomba: $\log z = \log|z| + i \arg z$, $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$.)

11. Reši enačbe:

    (a) $e^z = 2 - 2i$,

    (b) $e^z = \pi i$,

    (c) sh$z = 0$,

    (d) $\sin z = -i$,