Vaje - Kompleksna analiza - Cauchyev izrek

1. Izračunaj integrale naslednjih funkcij:

   (a) $f(z) = \overline{z}e^{2z}$ po daljici med točkama $z_1 = -1 + i$ in $z_2 = i$,

   (b) $f(z) = e^{2z}$ po paraboli $y = x^2$, $x \in [0, 1]$,

   (c) $f(z) = \frac{1}{z^2}$ po krožnici z enačbo $|z| = 3$,

   (d) $f(z) = |z|\bar{z}$ po robu polkroga v zgornji polravnini s središčem 0 in radijem 1,

   (e) $f(z) = |z|^2$ po robu pravokotnika z oglišči $z_1 = -2$, $z_2 = 2$, $z_3 = 2 + i$ in $z_4 = -2 + i$.

2. Z uporabo Cauchyjevega izreka izračunaj integral

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2ax)dx, a \in \mathbb{R}$$

   (Nasvet: Integriraj funkcije $f(z) = e^{-z^2}$ po robu pravokotnika z oglišči $-R$, R, $R+ia$, $-R+ia$, kjer je R pozitivno število. Upoštevaj še, da je $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.)

3. Z uporabo Cauchyjeve integralske formule izračunaj integrale po pozitivno orientirani sklenjeni krivulji:

   (a) $\int_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^3}dz$,

   (b) $\int_{|z-i|=1} \frac{z\sin(\pi z)}{(z-i)^2}dz$,

   (c) $\int_{|z-1+i|=1} \frac{z^3}{z^2+9}dz$,

   (d) $\int_{|z-i|=1} \frac{e^{2z}}{1+z^2}dz$.

4. Z uporabo Cauchyjeve integralske formule izračunaj integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}dx$. (Nasvet: Izračunaj integral $\int_K \frac{e^{iz}}{1+z^2}$ po pozitivno orientirani sklenjeni krivulji K, ki je rob območja $L = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq 0, |z| \leq R\}, R > 1$.)