

Vaje - Diferencialne enačbe z ločljivima spremenljivkama in linearne diferencialne enačbe

1. Grafično poskusi rešiti naslednje diferencialne enačbe, nato pa preveri, ali so funkcije na desni spodaj rešitve diferencialnih enačb:

(a) $y' = y + 1$, $y = 4e^x - 1$,

(b) $y' = 1 + y^2$, $y = \tan(x)$,

(c) $y'' - 2y' + y = 0$, $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$.

2. Reši naslednje diferencialne enačbe z ločljivima spremenljivkama:

(a) $y' = 2y + 3$, $y(0) = 1$.

(b) $y' = (1 + x^2)y^2$, $y(1) = 2$,

(c) $xy^2y' = 1 + x^4$, $y(1) = 1$,

(d) $y' = -2y^2e^{2x}$, $y(0) = 2$

(e) $xy^2y' = 1 - x^2$, $y(1) = 1$,

(f) $xy^2 = e^{-x}y'$, $y(0) = -1$,

(g) $(x^2 - 1)y' = 2y$, $y(0) = 1$,

3. Reši naslednje linearne diferencialne enačbe:

(a) $y' - y = 2x$.

(b) $y' + y = x^2 + 1$.

(c) $xy' - y = 2x^{-1}$

(d) $y' - \frac{y}{x} = x^3$,

(e) $y' - 2xy = x$.

(f) $xy' + y = e^{2x}$

(g) $xy' - y = x^4$, $y(1) = -2$,

4. Reši naslednje diferencialne enačbe

(a) $y' = \frac{(x+y)^2}{2x^2}$, (Nasvet: Uvedi novo spremenljivko $z = \frac{y}{x}$.)

(b) $xy' - y = xe^{\frac{y}{x}}$. (Nasvet: Uvedi novo spremenljivko $u = \frac{y}{x}$.)

(c) $xy' - y = xy^{-2}$. (Nasvet: Uvedi novo spremenljivko $z = y^3$.)

(d) $y' - y = -x^2y^{-1}$, (Nasvet: Uvedi ustrezno novo spremenljivko $z = y^2$.)

5. Neka agencija oglašuje nek izdelek. Predpostavimo, da je hitrost informiranosti populacije o izdelku sorazmerna deležu populacije, ki o njem še ni ničesar slišala. Utemelji enačbo $y' = k(1 - y)$, kjer je $y(t)$ delež že informirane populacije v času t , k pa neka konstanta. Kolikšen delež populacije pozna izdelek po dveh letih, če po enem letu izdelek pozna že polovica.
6. Poišči krivuljo skozi točko $(1, 1)$, za katero velja, da katerakoli tangenta na krivuljo odreže na x -osi odsek, ki je enak dvakratniku abscise dotikališča tangente. $y' = -\frac{y}{x}$, nato pa reši dobljeno diferencialno enačbo.)
7. Med neko kemijsko reakcijo iz snovi A nastaja snov B , pri čemer je hitrost spreminjanja mase snovi A v času t sorazmerna kvadratu mase snovi A , prisotne v času t . Kolikšna je masa snovi A po dveh urah, če je na začetku masa snovi A enaka 60 g, po eni uri pa 10 g.
8. V rezervoarju je na začetku 200kg vodne raztopine s 100g raztopljenih soli, nato pa začne vanj s hitrostjo 3kg/min pritekati raztopina z 1g soli v kg raztopine, ven pa s hitrostjo 2kg/min izteka dobro premešana mešanica. Razloži, da je hitrost spreminjanja soli v rezervoarju $y'(t)$ v času t enaka razliki hitrosti 'pritekanja' soli (3kg/min · 1g/kg) oziroma 'odtekanja' soli (2kg/min · $\frac{y(t)}{200+3t-2t}$), torej $y' = 3 - 2\frac{y}{200+t}$. (Nasvet: Opazi, da je 'koncentracija' soli v času t enaka $\frac{y}{200+t}$.) Kako se v odvisnosti od časa t spreminja masa soli $y(t)$ v rezervoarju?