1	12
2	13
3	13
4	15
Σ	50

Funkcije več spremenljivk: 1. kolokvij

23. 11. 2022

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 50 točk. Veliko uspeha.

MARKO SLAPAR — 12345678

Ime in priimek — Vpisna številka

1. naloga (12 točk)

a) (4) Napišite definicijo metričnega prostora.

Metrični prostor je neprazna množica M, skupaj s preslikavo $d: M \times M \to \mathbb{R}$, da velja:

(1) $\forall x, y \in M: d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(2) $\forall x, y \in M: d(x,y) = d(y,x)$

(3) $\forall x, y, z \in M: d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

b) (5) Naj bo $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ enaka $q(x) = 1$, če je $x \in \mathbb{Q}$ in $q(x) = 0$, če $x \notin \mathbb{Q}$. Naj bo $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana kot

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & q(x) = q(y) \\ |x-y|+1, & q(x) \neq q(y) \end{cases}$$

Pokažite, da je d metrika na $\mathbb{R}$.

(1) Če $q(x) \neq q(y) \Rightarrow d(x,y) \geq 1 \neq 0$

$q(x) = q(x) \Rightarrow d(x,y) = |x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$

(2) $q(x) = q(y) \Rightarrow d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$

$q(x) \neq q(y) \Rightarrow d(x,y) = |x-y|+1 = |y-x|+1 = d(y,x)$

(3) $q(x) = q(y) = q(z) \Rightarrow |x-y| + |y-z| \geq |x-z|$ ✓

$q(x) = q(y) \neq q(z) \Rightarrow |x-y| + |y-z| + \cancel{1} \geq |x-z| + \cancel{1}$ ✓

$q(x) \neq q(y) = q(z) \Rightarrow |x-y| + \cancel{1} + |y-z| \geq |x-y| + \cancel{1}$ ✓

$q(x) = q(z) \neq q(y) \Rightarrow |x-y| + 1 + |y-z| + 1 \geq |x-z|$ ✓

c) (3) Kaj je odprta krogla $K(0;2)$ v metričnem prostoru $(\mathbb{R}, d)$?

$K(0;2) = \{x \in \mathbb{R} ; d(x,0) < 2\} = \{x \in \mathbb{Q} ; d(x,0) < 2\}$
$\cup \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} ; d(x,0) < 2\} = \{x \in \mathbb{Q} ; |x-0| < 2\}$
$\cup \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} ; |x-0| + 1 < 2\} = \{x \in \mathbb{Q} ; |x| < 2\}$
$\cup \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} ; |x| < 1\} = [-1,1] \cup (-2,-1) \cap \mathbb{Q}$
$\cup (1,2) \cap \mathbb{Q}$

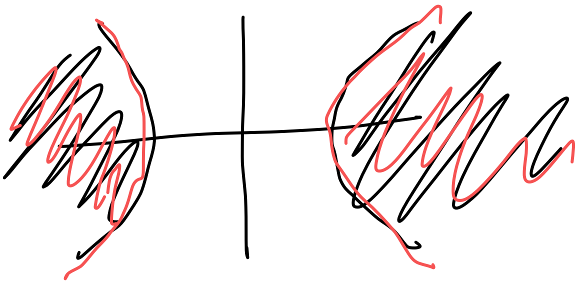
2. naloga (13 točk)

a) (4) Naj bo $A \subset \mathbb{R}^n$ z običajno metriko. Natančno napiši, kdaj je točka $a \in A$ notranja točka in definicijo robnih točk množice A. Kdaj je množica A zaprta in kdaj kompaktna?

- $a \in A$ je notranja točka, če $\exists r > 0$, da je $K(a,r) \subset A$. $a \in \mathbb{R}^n$ je robna točka, če za $\forall r > 0$ velja $K(a,r) \cap A \neq \emptyset \wedge K(a,r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$.
- A je zaprta, če $\partial A \subset A \iff \mathbb{R}^n \setminus A$ odprta
- A je kompaktna $\iff$ A je zaprta in omejena

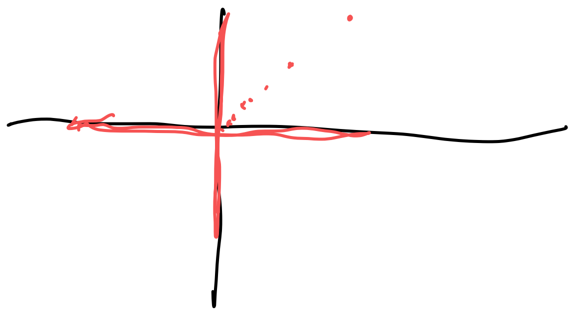
b) (9) Za naslednje množice napišite, ali so povezane, omejene, zaprte, odprte, kompaktne. Vse množice so podmnožice prostora $\mathbb{R}^2$ z običajno metriko. Množice skicirajte.

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 \geq 1\}$.



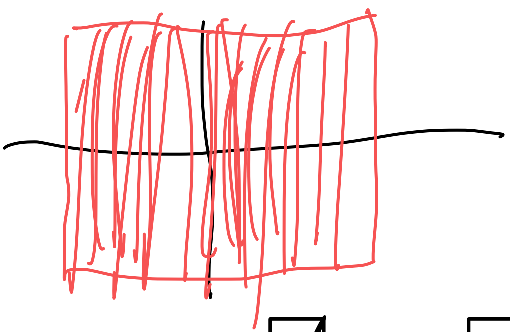
Povezana ☒ Omejena ☒ Zaprta ✓ Odprta ☒ Kompaktna ☒

- $B = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \in \mathbb{R}^2;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.



Povezana ☒ Omejena ✓ Zaprta ✓ Odprta ☒ Kompaktna ✓

- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{Q}, -1 \leq y \leq 1]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \max\{|x|, |y|\} = 1\}$.



Povezana ✓ Omejena ✓ Zaprta ☒ Odprta ☒ Kompaktna ☒

3. naloga (13 točk)

a) (4) Naj bo $f(x, y)$ funkcija dveh spremenljivk, definirana na $D \subset \mathbb{R}^2$, in $(a, b) \in D$ notranja točka. Natančno napišite definicijo parcialnega odvoda $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}, \text{ če}$$

seveda limita obstaja

b) (5) Dana je funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & y \neq x^2 \\ y, & y = x^2 \end{cases}$$

Funkcija je seveda zvezna in parcialno odvedljiva v vseh točkah iz množice $\{(x, y), y \neq x^2\}$. Pokažite, da je f zvezna tudi v točkah $(0, 0)$ in $(1, 1)$, ni pa zvezna v ostalih točkah iz krivulje $y = x^2$.

$$(0,0): \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \begin{cases} x; & y \neq x^2 \\ y; & y = x^2 \end{cases} = 0 = f(0,0)$$

$$(1,1): \lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \begin{cases} x; & y \neq x^2 \\ y; & y = x^2 \end{cases} = 1, \text{ saj}$$

je $\lim_{x \to 1} x = 1$ in $\lim_{y \to 1} y = 1$

$$(a,a^2),\ a \neq 1: \lim_{x \to a} f(x,a^2) = \lim_{x \to a} x = a \neq a^2 = f(a,a^2)$$

c) (4) Preverite, ali je f parcialno odvedljiva v točkah $(0, 0)$ in $(1, 1)$, in če je, zapišite parcialne odvode v teh dveh točkah.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h - 0}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h,1) - f(1,1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1+h - 1}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1,1+h) - f(1,1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - 1}{h} = 0$$

4. naloga (12 točk)

a) (4) S pomočjo diferenciala izračunajte približno vrednost izraza

$$\ln(\sqrt[5]{0,95}+\sqrt[4]{1,02}-1).$$

$$f(x,y)=\ln(\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{y}-1);$$

$$f(0{,}95,1.02)\doteq f(1,1)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\cdot(-0{,}05)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\cdot 0{,}02=-\frac{0{,}05}{5}+\frac{0{,}02}{4}$$

$$=\underline{\underline{-0{,}005}}$$

$$f(1,1)=\ln(1+1-1)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=\frac{1}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{y}-1}\cdot\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}\Big|_{(x,y)=(1,1)}=\frac{1}{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=\frac{1}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{y}-1}\cdot\frac{1}{4}y^{-3/4}\Big|_{(x,y)=(1,1)}=\frac{1}{4}$$

b) (4) Naj bo

$$f(x,y)=\begin{cases} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Pokažite, da je funkcija v točki $(0,0)$ zvezna in parcialno odvedljiva po obeh sremenljivkah.

zv: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$: $\quad r\cos\varphi\,\frac{\cancel{r^2}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}{\cancel{r^2}}\xrightarrow[r\to0]{}0$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)\ \checkmark$$

odv: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^3}{h^3}=1$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0$$

c) (4) Pokažite, da f ni diferenciabilna v točki $(0,0)$. Ali je funkcija razreda $\mathcal{C}^1$?

$$o(h,k)=f(h,k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot h-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot k=$$

$$=h\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}-h=\frac{\cancel{h^3}-hk^2-\cancel{h^3}-hk^2}{h^2+k^2}=-\frac{hk^2}{h^2+k^2}$$

$$\frac{o(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=-\frac{hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}\not\xrightarrow[(h,k)\to0]{}0,\ \text{ker, če } h=k,$$

dobimo $-\frac{h^3}{(2h^2)^{3/2}}=-\frac{\cancel{h^3}}{2^{3/2}\cdot\cancel{h^3}}\to\frac{1}{2^{3/2}}\neq0$