Univerza v Ljubljani – FS & FKKT

Varnost v strojništvu

doc.dr. Boris Jerman*, univ.dipl.inž.str.*

Govorilne ure:

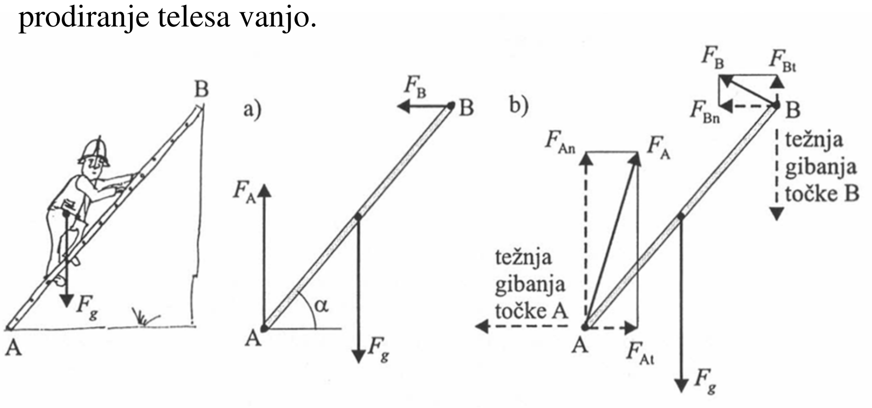
- med šolskim letom: srede med 9:00 in 11:30
- pisarna: FS - 414
- telefon: 01/4771-414
- boris.jerman@fs.uni-lj.si, (Tema/Subject: VDPN - ...)

Prosojnice izdelane po viru: Stropnik Jože, Šterk Peter, Juhart Karli: Statika: učbenik za mehaniko

Drsno trenje

Poseben primer podpor, ki smo jih obravnavali, so dotikalne podpore.

Telo se s svojo dotikalno ploskvijo opira na podlago, podlaga pa s pravokotno reakcijo (normalno silo) preprečuje prodiranje telesa vanjo.



Drsno trenje

Primer lestve. Lestev je podprta z dotikalnima podporama A in B.

Na osnovni sliki je narisana lestev, kot se jo običajno uporablja.

Na sliki a) je shema lestve s silami, ki delujejo nanjo. Očitno je, da lestev ni v ravnotežju, ker vsota sil v vodoravni smeri ni nič (mnogokotnik sil ni sklenjen), pa tudi vsota momentov je različna od nič (smernice sil se ne sekajo v skupni točki).

Lestev bi torej zdrsela proti levi ter se hkrati zavrtela okrog podpore A. To se v praksi ne zgodi, če je v podporah dovolj trenja.

Drsno trenje

Stične ploskve med telesi so hrapave.

Posledica hrapavosti in na sliki a) narisanih reakcij je pojav sile trenja.

Reakciji v podpori A in B zaradi trenja nista več pravokotni na stični ploskvi med telesoma, ampak poševni (slika b).

Reakcije spet razstavimo na dve komponenti:
- komponenta, pravokotna na podlago (F_{An} in F_{Bn}) in
- komponento vzdolž podlage – sila trenja (F_{At} in F_{Bt}).

Drsno trenje

Sila trenja se pojavi na stični ploskvi med dvema hrapavima telesoma in nasprotuje medsebojnemu drsenju teh teles, torej vedno nasprotuje:

- težnji po gibanja nekega telesa (če telesi relativno mirujeta) – sila lepenja/statičnega trenja – koeficient lepenja μ_0;
- gibanju telesa (če se telesi relativno gibata) – sila trenja – koeficient trenja μ.

Sila trenja se torej obnaša kot reakcijska sila v podporah – njena dejanska velikost je ravno tolikšna, da bo sistem v ravnotežju.*

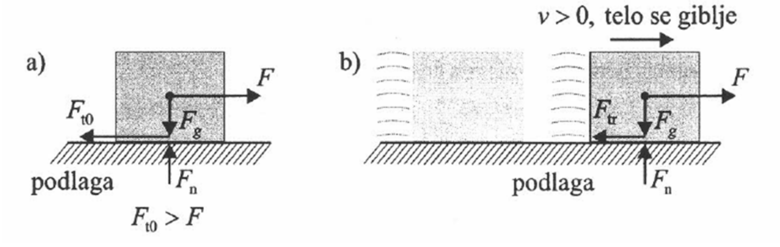
* … To velja le do največje sile trenja, ki se lahko v nekem primeru pojavi, nato pa pride do relativnega zdrsa in statični problem preide v dinamičnega.

Drsno trenje

Velikost sile trenja je odvisna:

- od količnika (koeficienta) trenja in
- od pravokotne (normalne) komponente sile podlage F_n.

Sila trenja je skoraj neodvisna od velikosti stičnih ploskev opazovanih teles (Charles Augustin de Coulomb (1736-1806), francoski fizik).



$F_{t0} = \mu_0 \cdot F_n$

$F_{tr} = \mu \cdot F_n.$

Drsno trenje

Količnik trenja je določen kot razmerje sil:

$$\mu_0 = \frac{F_{t0}}{F_n} \qquad \mu = \frac{F_{tr}}{F_n},$$

njegova enota je: $[\mu] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}} = 1.$

Enota za količnik trenja je torej 1. Tako poimenovanje enote je leta 1992 uvedel mednarodni standard ISO 31. Prej smo dejali, da je količnik trenja „brez enote".

Količnik trenja je odvisen od vrste materialov, od hrapavosti stanja površin (suho, mazano) ter od temperature.

$F_{tO} > F_{tn}$ zato mora biti tudi $\mu_0 > \mu$.

Drsno trenje

Ali je trenje v realnem svetu koristno?

Trenje je v veliko primerih koristno!

Mnogokrat bi želeli, da trenja ni in ga zmanjšujemo na najmanjšo možno mero.

Primeri koristne izrabe pojava trenja so:

- trenje med jermenom in jermenico;
- trenje med zavornimi ploščicami in zavornim kolutom,
- trenje med vijakom in matico,
- trenje med podplati čevljev in tlemi.

Kdaj želimo trenje čim bolj zmanjšat?

Drsno trenje

Primeri, ko želimo trenje čim bolj zmanjšati, so:
- trenje med smučmi in snegom, (drsalkami in ledeno ploščo),
- trenje med sanmi in vodili obdelovalnih strojev,
- trenje v drsnih ležajih,
- trenje med batom in valjem pri motorjih z notranjim zgorevanjem.

Eden od načinov zmanjšanja trenja je, da zmanjšamo količnik trenja. To dosežemo:
- s pravilno kombinacijo materialov,
- čim bolj fino obdelavo stičnih ploskev ter
- z mazanjem.

Vrednosti količnika trenja najdemo v različnih priročnikih.

Drsno trenje

Eden od načinov zmanjšanja trenja je, da zmanjšamo količnik trenja. To dosežemo:
- s pravilno kombinacijo materialov,
- čim bolj fino obdelavo stičnih ploskev ter
- z mazanjem.

Vrednosti količnika trenja najdemo v različnih priročnikih.

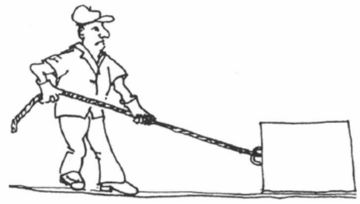
Drug način zmanjšanja trenja je, da zmanjšamo normalno silo med telesoma.

Primer takega zmanjšanja sile trenja je premikanje omare v sobi. Omara lažje zdrsne, če jo vlečemo tudi navzgor, čeprav je ne dvignemo.

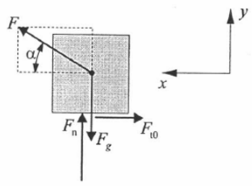
V tehniki je mnogo pogostejši 1. način za zmanjševanje.

Drsno trenje

ZGLED 49. S kolikšno silo mora delavec na sliki 10.4 vleči vrv, da bo premaknil zaboj teže 600 N po vodoravni podlagi, če je količnik statičnega trenja med zabojem in podlago 0,25? Vrv oklepa z vodoravnico kot 12°.



Slika 10.4: *K zgledu 49*



Slika 10.5: *Sile, ki delujejo na zaboj v zgledu 49*

Rešitev: Skiciramo vse sile na zaboj (slika 10.5), nastavimo ravnotežno enačbo za smer y ter izrazimo pravokotno komponento sile podlage in silo trenja F_{t0}. Zaboj se premakne, če je vodoravna komponenta vlečne sile večja od sile trenja.

$$\sum F_{iy} = 0 \quad ; \quad F\sin\alpha + F_n - F_g = 0,$$

$$F_n = F_g - F\sin\alpha.$$

Enačba trenja:

$$F_{t0} = \mu_0 \cdot F_n = \mu_0\left(F_g - F\sin\alpha\right),$$

$$\begin{aligned} F_x &> F_{t0}, \\ F\cos\alpha &> \mu_0\left(F_g - F\sin\alpha\right), \\ F\cos\alpha &> \mu_0 F_g - \mu_0 F\sin\alpha, \\ F\cos\alpha + \mu_0 F\sin\alpha &> \mu_0 F_g, \\ F\left(\cos\alpha + \mu_0\sin\alpha\right) &> \mu_0 F_g, \end{aligned}$$

$$F > \frac{\mu_0 F_g}{\cos\alpha + \mu_0\sin\alpha} = \frac{0{,}25 \cdot 600}{\cos 12° + 0{,}25\sin 12°} = 145{,}6\,\mathrm{N}.$$

Delavec mora potegniti vrv s silo, ki je večja od 145,6 N.

Drsno trenje

Zanimivo je proučiti, kolikšna mora biti sila F, če je kot vrvi 0° ali 90°. Pri vodoravnem položaju vlečne vrvi v gornjo končno enačbo vstavimo kot 0°. Vidimo, da mora biti $F > \mu_0 F_g$, ker je pač pravokotna komponenta sile podlage $F_n = F_g$.

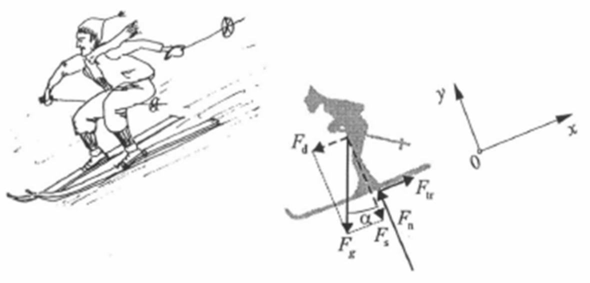
V primeru $\alpha = 90°$ je vlečna vrv navpična, zaboj dvigamo stran od podlage:

$$F > \frac{\mu_0 F_g}{\cos 90° + \mu_0 \sin 90°} = \frac{\mu_0 F_g}{0 + \mu_0 \cdot 1} = \frac{\mu_0 F_g}{\mu_0} = F_g .$$

Če hočemo zaboj dvigniti, moramo nanj resnično delovati s silo, večjo od njegove teže.

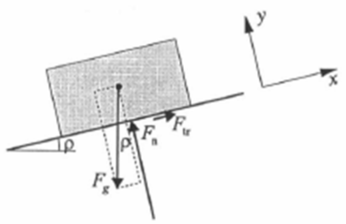
Drsno trenje na strmini

Opazujemo smučarja, ki se s sorazmerno majhno hitrostjo spušča po strmini navzdol (slika 10.10). Ker je hitrost majhna, ne naredimo velike napake, če silo zračnega upora zanemarimo. Na smučarja torej delujejo teža, pravokotna komponenta sile podlage in sila trenja.



Slika 10.10: *Smučar na strmini*

Drsno trenje na strmini



Slika 10.11: *Torni kot – sila trenja je enaka dinamični komponenti teže.*

Če je dinamična komponenta teže smučarja $F_d = F_g \cdot \sin\alpha$ večja od sile trenja F_{tr}, se smučar giblje pospešeno. V primeru, da je dinamična komponenta manjša od sile trenja, je gibanje smučarja pojemajoče, smučar se čez čas na strmini ustavi. Če sta obe sili enaki, smučar drsi z enakomerno hitrostjo navzdol. Zanima nas, kolikšen mora biti kot strmine za enakomerno drsenje (slika 10.11). Označimo ta kot z ϱ.

Drsno trenje na strmini

$$\sum F_{iy} = 0\ ;\ -F_g \cdot \cos\varrho + F_n = 0,$$
$$F_n = F_g \cdot \cos\varrho,$$
$$F_{tr} = \mu \cdot F_n = \mu \cdot F_g \cdot \cos\varrho;$$

$$\sum F_{ix} = 0\ ;\ -F_g \cdot \sin\varrho + F_{tr} = 0,$$
$$-F_g \cdot \sin\varrho + \mu \cdot F_g \cdot \cos\varrho = 0,$$
$$F_g \sin\varrho = \mu F_g \cos\varrho.$$

Drsno trenje na strmini

Če obe strani enačbe delimo z $F_g \cdot \cos\varrho$, dobimo:

$$\frac{\sin\varrho}{\cos\varrho} = \mu \qquad \text{oziroma} \qquad \tan\varrho = \mu. \tag{10.1}$$

Ugotovili smo, da **telo zaradi lastne teže drsi po klancu enakomerno navzdol, če je količnik trenja enak tangensu naklonskega kota strmine.** Naklonski kot strmine, pri katerem telo drsi z enakomerno hitrostjo navzdol, imenujemo **torni kot** in ga označimo z ϱ. Če bi naredili podobno analizo za pospešeno in pojemajoče gibanje telesa po strmini navzdol, bi dobili pogoja:

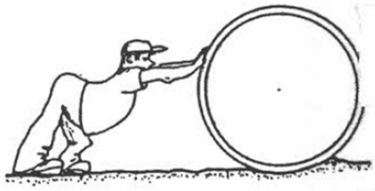
$\alpha > \varrho$ za pospešeno drsenje,

$\alpha < \varrho$ za pojemajoče drsenje.

Kotalno trenje

Pri potiskanju valja po ravni podlagi se pojavi kotalno trenje.

Če bi bili površini podlage in valja dovolj gladki, bi valj drsel in se ne bi kotalil.

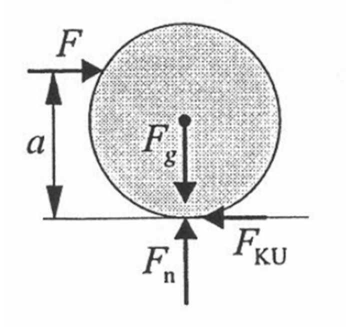


upor pri kotaljenju

Opazujmo enakomerno kotaljenje. Na valj očitno deluje vsaj ena dvojica sil, sicer se valj ne bi vrtel.

Kotalno trenje

To sta sili *F* in F_{KU}, ki povzročata gonilni moment: $M_G = a \cdot F$

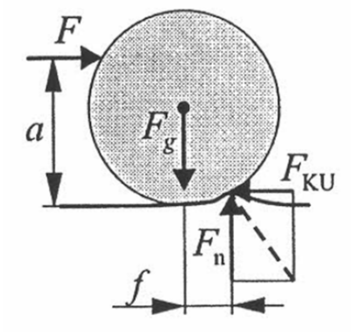


Togi valj na togi podlagi: ni kotalnega upora, zato bi se valj že pri majhni sili F kotalil vedno hitreje.

V realnosti dosežemo pri neki sili enakomerno gibanje, ker nasproti gibanju deluje moment kotalnega upora:

Kotalno trenje

To moment povzročata sili F_n in F_g, z medsebojno razdaljo f: $M_{KU} = f \cdot F_g$

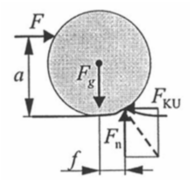


Sila podlage, ki deluje na valj med kotaljenjem je podana s komponentama F_n in F_{KU}.

Kotalno trenje

Pri enakomernem kotaljenju velja sta pogonski moment in moment kotalnega upora enaka:

$$a \cdot F = f \cdot F_g,$$
$$F = \frac{f}{a} \cdot F_g.$$



f … krak kotalnega momenta je razdalja med smernicama sil F in F_n in popiše velikost vtiska valja v podlago. Poišče se jo v tabelah, določa pa s pomočjo meritev. Ima dolžinsko enoto.

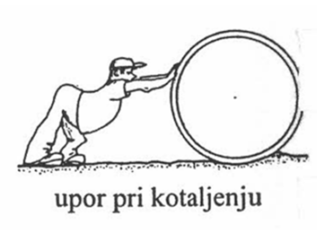
Kotalno trenje je običajno manjše od drsnega, zato je v praksi zelo pomembno. Popišemo ga lahko s koeficientom kotalnega upora:

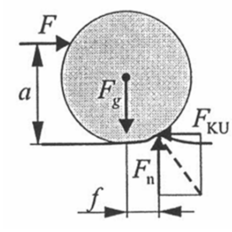
$$c = f/d$$

Zgled

Oseba po mehkem terenu kotali betonsko cev premera d=1,2 m in mase 620 kg tako, da jo potiska v vodoravni smeri Krak kotalnega momenta je 32 mm.

Izračunajte, koliko od tal mora oseba prijeti cev, da bo za enakomerno kotaljenje zadoščala sila 185 N.





Rešitev: Oseba potiska na višini *a* in povzroča gonilni moment $M_G = a \cdot F$, ki mora biti enak kotalnemu momentu:

Zgled

Gonilni moment: $M_G = a \cdot F$, ki mora biti enak kotalnemu momentu:

$$M_{KU} = f \cdot F_g,$$

$$a \cdot F = f \cdot F_g,$$

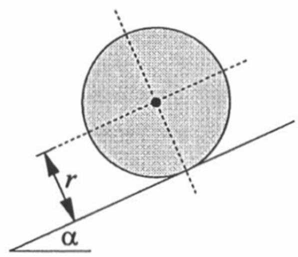
$$a = f \cdot \frac{F_g}{F} = 32 \cdot \frac{620 \cdot 9{,}81}{185} = 1052\,\text{mm}.$$

Oseba mora prijeti cev na višini 1052 mm.

Kolikšno silo bi potrebovali za kotaljenje, če bi valj potiskali povsem na vrhu?

Zgled

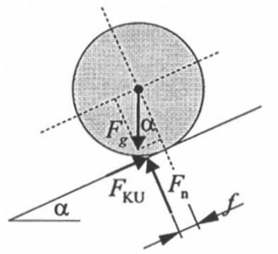
Ugotovite, ali se kroglica s polmerom 2,5 mm kotali po podlagi z naklonom $\alpha = 0{,}5°$, če je krak kotalnega momenta $f = 0{,}01$ mm.



<u>Pozor:</u> Čeprav je kroglica majhna in nagib neznaten, moramo na skici narisati ustrezno veliko kroglico in ustrezno povečan kot (naj ostane ostri kot), da lahko narišemo pregleden legopis sil.

Zgled

Najprej je potrebno narisati na kroglico delujoče sile:



Težo F_g razstavimo na komponenti v smeri klanca in pravokotno nanj. Gonilni moment je:

$$M_{\mathrm{G}} = r \cdot mg \sin\alpha.$$

Zgled

Moment kotalnega upora je:

$$M_{\mathrm{KU}} = f \cdot F_n = f \cdot mg \cos\alpha.$$

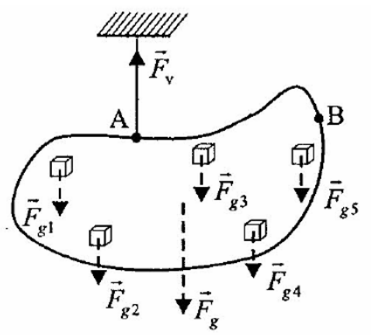
Razmerje obeh momentov je:

$$\frac{M_{\mathrm{G}}}{M_{\mathrm{KU}}} = \frac{rmg \cdot \sin\alpha}{fmg \cdot \cos\alpha} = \frac{r}{f} \cdot \tan\alpha = \frac{2{,}5}{0{,}01} \cdot \tan 0{,}5° = 2{,}18.$$

Razmerje je večje od 1 →
gonilni moment večji od kotalnega →
kroglica se pospešeno kotali.

Težišča teles

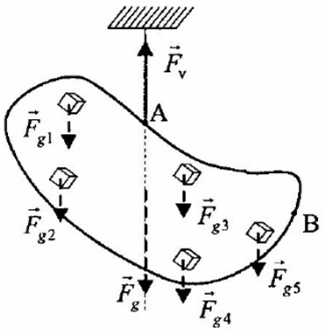
Telo v poljubni točki pripnimo za vrvico in obesimo.



Telo navidez razstavimo na majhne delce. Na vsakega od teh delcev deluje sila teže. Vsi delci skupaj, gledano poenostavljeno, predstavljajo sistem vzporednih sil, ki imajo nek navor na obesišče A.

Težišča teles

Telo se zavrti in umiri v nekem položaju, ko je navor sil teže inkrementalnih delcev na levi enak navoru delcev na desni..



Rezultante vseh sil teže vseh majhnih delcev =
= sila teže celotnega telesa.

Smernica na kateri leži sila teže =
= težiščnica.

To se zgodi, ko je lega rezultante vseh sil teže vseh majhnih delcev taka, da gre smernica rezultante skozi točko A, zaradi česar je njen moment na točko A enak nič.

Težišča teles

Z obešanjem telesa v različnih točkah dobimo različne težiščnice, ki se sekajo med seboj v skupni točki – težišču telesa.

Koordinate težišča telesa izračunamo po enačbah:

$$x_0 = \frac{\sum x_i F_{gi}}{\sum F_{gi}},$$
$$y_0 = \frac{\sum y_i F_{gi}}{\sum F_{gi}}$$
$$z_0 = \frac{\sum z_i F_{gi}}{\sum F_{gi}},$$

kjer so X_i, Y_i in Z_i koordinate težišč posameznih elementarnih teles, F_{gi} pa njihove teže.

Telesa so lahko homogena ali nehomogena!

Težišča likov / prerezov

Enačbe za določitev težišča likov se da izpeljati iz enačb za težišča teles.

Predpostavimo, da je telo enakomerno debelo (*t* je konstanta) in homogeno. Tedaj je njegovo težišče vedno v ravnini, ki je na polovici debeline telesa (*t/2*).

Določiti je potrebno le še lego težišča v tej ravnini. Naj bo to ravnina [x, y]. Koordinati težišča (x_0, y_0) izračunamo po enačbah:

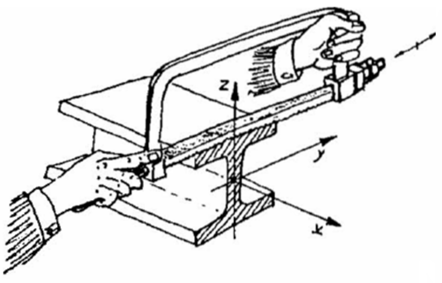
$$x_0 = \frac{\sum x_i \cdot A_i}{\sum A_i}, \quad y_0 = \frac{\sum y_i \cdot A_i}{\sum A_i}.$$

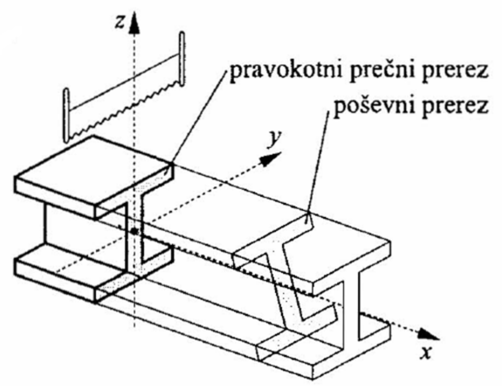
Kjer so x_i in y_i koordinate težišč elementarnih likov in A_i površine teh likov. (Teža je: $A_i \cdot t \cdot \rho \cdot g$.)

Težišča likov / prerezov

Lega težišča lika nas zanima, ker jo potrebujemo za ugotavljanje razporeditve notranjih sil po posameznih prerezih nosilnih delov konstrukcij.

O prerezu govorimo, če nosilni del na videz prerežemo. Osnova je pravokotni - prečni prerez:

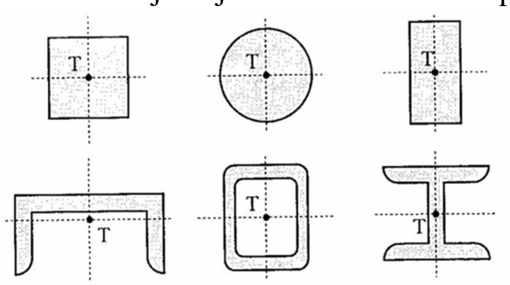




Težišča likov / prerezov

Pravokotni - prečni prerez bomo krajše imenovali kar **prerez**, njegovo ploščino pa bomo označili z A.

Nosilni deli konstrukcij imajo lahko zelo različne prereze:



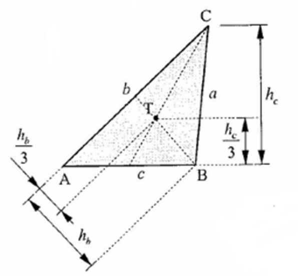
Običajno so sestavljeni iz elementarnih likov, kot so pravokotnik, kvadrat, krog. Za te like je lega težišča očitna in podana v tabelah.

Težišča likov / prerezov

Primer za težje določljiva elementarna lika.
Splošni trikotnik:

Težišče je oddaljeno od stranice za eno tretjino višine:

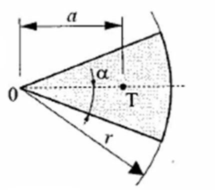
$y_0=h_c/3$



Krogov izsek:

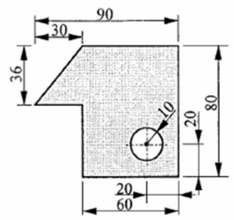
Težišče leži na simetrali, oddaljenost težišča od vrha O je:

$$a = \frac{2r \sin\alpha}{3\widehat{\alpha}},$$

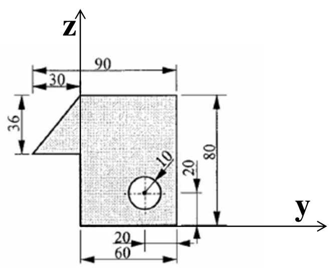


Primer

Za lik na skici določite lego težišča. Mere so v milimetrih.



<u>Rešitev:</u>
Prereze bomo obravnavali v ravnini *y, z,* zato določimo koordinatni sistem *yz.*

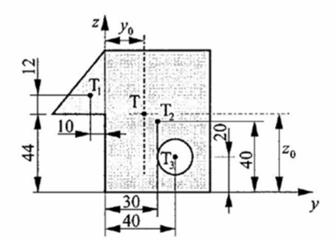


Enačbi za koordinati težišča sta:

$$y_0 = \frac{\sum y_i \cdot A_i}{\sum A_i}, \quad z_0 = \frac{\sum z_i \cdot A_i}{\sum A_i}.$$

Primer

Lik razdelimo na elementarne like: trikotnik, pravokotnik ter krog (luknja) in izračunamo lokalna težišča ter ploščine:



Zaradi večje preglednosti podatke vpišemo v tabelo, kjer izvedemo tudi pomožne račune. Ploščino luknje moramo odšteti, zato ji damo negativni predznak:

Primer

Tabela s podatki:

l_i	Lik	A_i mm^2	y_i mm	z_i mm	y_iA_i mm^3	z_iA_i mm^3
1	trikotnik	540	–10	56		
2	pravokotnik	4800	30	40		
3	krog – odštejemo	–314	40	20		
$\sum$		5026				

Izračunati je potrebno še produkte in končni vsoti.

Primer

Dokončana tabela:

l_i	Lik	A_i mm^2	y_i mm	z_i mm	y_iA_i mm^3	z_iA_i mm^3
1	trikotnik	540	–10	56	–5400	30 240
2	pravokotnik	4800	30	40	144 000	192 000
3	krog – odštejemo	–314	40	20	–12 560	–6280
$\sum$		5026			126 040	215 960

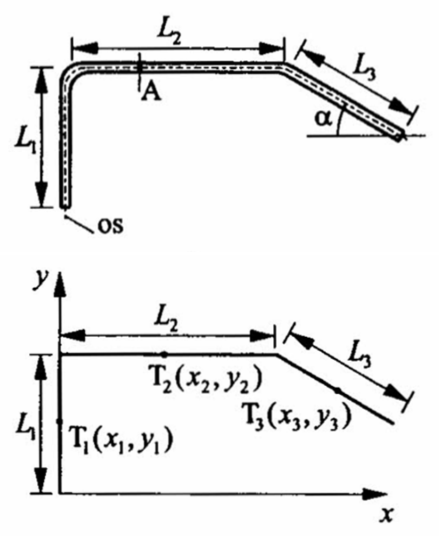
Koordinati težišča:

$$y_0 = \frac{\sum y_i \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{126\,040}{5026} = 25{,}08\,\text{mm},$$

$$z_0 = \frac{\sum z_i \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{215\,960}{5026} = 44{,}97\,\text{mm}.$$

Težišča črtovja / črtnih likov

Nekateri nosilci so izdelani iz tanjše pločevine, skrivljene v različne oblike. Prečni prerez je relativno majhne ploščine *A*. Je razmeroma dolg ter ima konstantno debelino ter lomljeno ali ukrivljeno os. Taki obliki pravimo črtovje, ker jo lahko poenostavimo v sestav več črt. Ker leži v ravnini, je ravninsko črtovje.



Težišča črtovja

Površina posameznega segmenta oz. „črte“ je:

$$A_i = L_i \cdot t.$$

Ker imajo vsi segmenti enako debelino t, se jo lahko v števcu in imenovalcu izpostavi in pokrajša:

$$x_0 = \frac{\sum x_i \cdot A_i}{\sum A_i} \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{\sum x_i \cdot L_i}{\sum L_i}$$

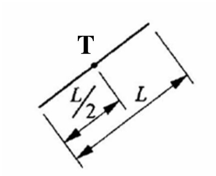
$$y_0 = \frac{\sum y_i \cdot A_i}{\sum A_i} \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{\sum y_i \cdot L_i}{\sum L_i}$$

Tako dobimo poenostavljene obrazce ta težišče ravninskega črtovja.

Težišča črtovja

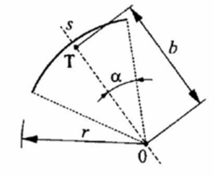
Sestavljen črtni lik se razdelili na elementarne črte, kot so npr. daljice in krožni loki. Določili se njihove dolžine in koordinate njihovih težišč.

Težišče daljice je na polovici njene dolžine.



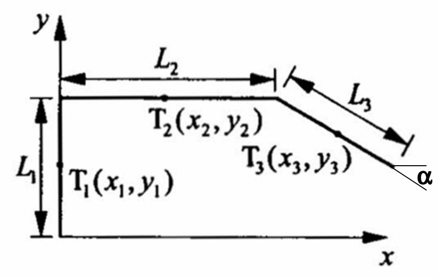
Težišče krožnega loka leži na simetrijski osi loka. Od središča krožnice O je oddaljeno za:

$$b = \frac{r \cdot \sin\alpha}{\widehat{\alpha}}$$



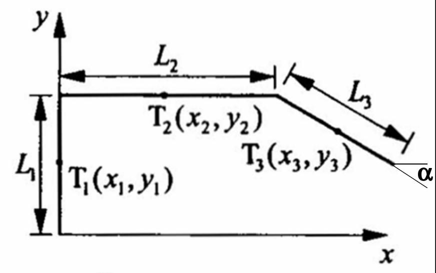
Primer

Izračunajte lego težišča črtnega lika. Podatki so:
L_1 = 10 cm, L_2 = 24 cm, L_3 = 12 cm, α = 30°.



Primer

Rešitev: Črtovje razdelimo na daljice in določimo njihove dolžine. Lego lokalnih težišč glede na izbrani koordinatni sistem vnesemo v tabelo. Pomožne računske operacije opravimo v tabeli.



$$x_3 = L_2 + \frac{L_3}{2} \cdot \cos\alpha = 24 + \frac{12}{2} \cdot \cos 30° = 29{,}2\,\mathrm{cm},$$

$$y_3 = L_1 - \frac{L_3}{2} \cdot \sin\alpha = 10 - \frac{12}{2} \cdot \sin 30° = 7\,\mathrm{cm}.$$

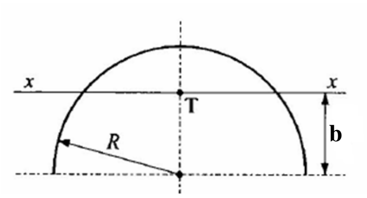
i	L_i cm	x_i cm	y_i cm	x_iL_i cm^2	y_iL_i cm^2
1	10	0	5	0	50
2	24	12	10	288	240
3	12	29,2	7	350,4	84
$\sum$	46			638,4	374

$$x_0 = \frac{\sum x_i L_i}{\sum L_i} = \frac{638{,}4}{46} = 13{,}9\,\mathrm{cm},$$

$$y_0 = \frac{\sum y_i L_i}{\sum L_i} = \frac{374}{46} = 8{,}1\,\mathrm{cm}.$$

Primer

Ugotovite, ali je pri krožnem loku na sliki dolžina loka nad osjo *x-x* enaka dolžini loka pod to osjo.



Rešitev: Izračunamo položaj težišča:

$$b = \frac{\mathbf{R} \cdot \sin\alpha}{\widehat{\alpha}} = 2\,R/\pi$$

Uporabimo formulo za dolžino krožnega loka (glej KSP).