Vaje 13. 12.

Tuesday, 13 December 2022 10:29

Naj bo $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$-preslikava.

<u>Jacobijeva matrika</u> preslikave $f = (f_1, \dots, f_n)$ v točki $x = (x_1, \dots, x_m)$ je

$$J_f(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m}} .$$

<u>Verižno pravilo</u>

Naj bo $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ preslikava razreda $\mathcal{C}^1$ in naj bo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ ——— " ——— .

Označimo $h = f \circ g$. Naj bodo $x = (x_1, \dots, x_m)$ koordinate na $\mathbb{R}^m$ in $y = (y_1, \dots, y_n)$ koord. na $\mathbb{R}^n$.

Preslikava f ima komponente $f = (f_1, \dots, f_k)$, preslikava g pa $g = (g_1, \dots, g_n)$ in $h = (h_1, \dots, h_k)$.

Tedaj velja <u>verižno pravilo</u>:

$$J_h(x) = \underbrace{J_g(f(x)) \cdot J_f(x)}_{\text{produkt matrik}}$$

V komponentah:

$$\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i = 1, \dots, k \\ j = 1, \dots, m}} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_l} \right)_{\substack{i = 1, \dots, k \\ l = 1, \dots, n}} \cdot \left(\frac{\partial g_l}{\partial x_j} \right)_{\substack{l = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m}}$$

(i,j)-komponento matrike J_h dobimo tako, da zmnožimo i-to vrstico matrike J_f z j-tim stolpcem matrike J_g:

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_l}(g(x)) \cdot \frac{\partial g_l}{\partial x_j}(x) .$$

Če označimo $y_l = g_l(x)$ dobimo ekvivalentno:

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_j}.$$

---

1. Naloga

S pomočjo verižnega pravila izračunaj $\frac{df}{dt}$, kjer je

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$x(r,\varphi) = r\cos\varphi, \quad y(r,\varphi) = r\sin\varphi$$

$$r(t) = t^2 + 1, \quad \varphi(t) = 2t - 2$$

Rešitev:

Označimo $\gamma(t) = (r(t), \varphi(t))$; $\Phi(r,\varphi) = (x(r,\varphi), y(r,\varphi))$.

Iščemo torej odvod kompozituma $F := f \circ \Phi \circ \gamma$.

Po verižnem pravilu je

$$\frac{df}{dt} = J_F(t) = J_f(x,y) \cdot J_\Phi(r,\varphi) \cdot J_\gamma(t).$$

Izračunamo:

- $$J_\gamma(t) = \begin{bmatrix} \frac{dr}{dt} \\ \frac{d\varphi}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ 2 \end{bmatrix}$$

- $$J_\Phi(r,\varphi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix}$$

- $$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \end{bmatrix}$$

Zmnožimo:

$$J_F(t) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t \\ 2 \end{bmatrix} =$$

t množimo:

$$J_F(t) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2x\cos\varphi + 2y\sin\varphi \;,\; -2xr\sin\varphi + 2yr\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= 4xt\underbrace{\cos\varphi}_{=x/r} + 4yt\underbrace{\sin\varphi}_{=y/r} - 4x\underbrace{r\sin\varphi}_{=y} + 4y\underbrace{r\cos\varphi}_{=x} =$$

$$= 4t\frac{x^2}{r} + 4t\frac{y^2}{r} - \cancel{4xy} + \cancel{4xy} =$$

$$= \frac{4t}{r}(\underbrace{x^2+y^2}_{=r^2}) = 4\underbrace{r}_{=t^2+1} \cdot t = 4t(t^2+1).$$

2. Naloga

Izračunaj $\frac{\partial g}{\partial r} = g_r$, $\frac{\partial g}{\partial \alpha} = g_\alpha$, če je

$g(x,y,z) = xyz^2$; $x(r,\alpha) = r\sin\alpha$,

$y(r,\alpha) = r\cos\alpha$, $z(r,\alpha) = r^2$.

Rešitev

Uporabimo formuli:

$$(*) \begin{cases} g_r = g_x x_r + g_y y_r + g_z z_r \quad \text{in} \\ g_\alpha = g_x x_\alpha + g_y y_\alpha + g_z z_\alpha . \end{cases}$$

Izračunamo:

$g_x = yz^2$, $g_y = xz^2$, $g_z = 2xyz$

$x_r = \sin\alpha$ $\quad x_\alpha = r\cos\alpha$

$y_r = \cos\alpha$ $\quad y_\alpha = -r\sin\alpha$

$z_r = 2r$ $\quad z_\alpha = 0$

Vstavimo v (*):

- $g_r = yz^2 \sin\alpha + xz^2 \cos\alpha + 2xyz \cdot 2r$

$= (r\cos\alpha)(r^2)^2 \sin\alpha + (r\sin\alpha)(r^2)^2\cos\alpha + 4r(r\cos\alpha)(r\sin\alpha) r^2 =$

$= r^5 \sin\alpha\cos\alpha + r^5 \sin\alpha\cos\alpha + 4r^5 \sin\alpha\cos\alpha =$

$= 6r^5 \sin\alpha\cos\alpha \underset{\text{adicijski izrek}}{=} 3r^5 \sin 2\alpha$

- $g_\alpha = yz^2 r\cos\alpha - xz^2 r\sin\alpha + 2xyz \cdot 0 =$

$= r^6\cos^2\alpha - r^6 \sin^2\alpha =$

$= r^6 \cos 2\alpha$

<u>Ekstremi funkcij več spremenljivk</u>

Naj bo $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$. Pravimo, da je $a \in D$:

i) <u>lokalni minimum</u> funkcije f, če obstaja okolica U točke $a \in D$, tako da za vse $x \in U$ velja

$$f(x) \geq f(a) \; ;$$

ii) <u>lokalni maksimum</u> funkcije f, če obstaja okolica U točke $a \in D$, tako da za vse $x \in U$ velja

$$f(x) \leq f(a).$$

Naj bo sedaj f razreda C^2. <u>Kandidatne točke</u> za ekstrem so točke $x \in D$, ki zadoščajo

... ⇝ pravimo jim tudi

za ekstrem so točke $x \in D$, za katere [illegible]

$$\nabla f(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right] = 0.$$ ⇝ pravimo jim tudi stacionarne točke

Hessejeva matrika funkcije f v točki $x \in D$ je matrika vseh parcialnih odvodov drugega reda:

$$H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i,j=1,\dots,n}.$$

Naj bo $x \in D$ stacionarna točka in naj bodo $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ lastne vrednosti $H_f(x)$.

i) če velja $\lambda_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$, potem je x lokalni minimum

ii) če velja $\lambda_i < 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$, potem je x lokalni maksimum

iii) če je $\lambda_j \geq 0 \quad \forall j$ in je $\lambda_i = 0$ za nek i, potem ne moremo sklepati o tem, ali je x ekstrem

iv) če je nek $\lambda_i > 0$ in nek $\lambda_j < 0$ $(i \neq j)$, potem x ni ekstrem.

---

3. Naloga

Ali ima katera od funkcij $f(x,y) = \sin(xy)$, $g(x,y) = \cos(xy)$ lokalni ekstrem v točki $(0,0)$?

Rešitev:

Oglejmo si najprej $g(x,y)$. Velja

$$g(0,0) = \cos 0 = 1.$$

Ker je $\cos t \leq 1$ za vse $t \in \mathbb{R}$, velja

$$g(x,y) = \cos(xy) \leq 1 = g(0,0) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

torej ima g v $(0,0)$ globalni ekstrem, torej tudi lokalni ekstrem.

Oglejmo si še $f(x,y)$. Velja

$$f(0,0) = \sin 0 = 1 .$$

Vemo, da velja $\sin t < 0$ za $-\varepsilon < t < 0$ in

$\sin t > 0$ za $0 < t < \varepsilon$.

Vzemimo npr. $(x,y) = (1/n, 1/n)$, torej $xy = 1/n^2$.

Tedaj je $f(x,y) = \sin \frac{1}{n^2} > 0$. Če vzamemo dovolj velik $n \in \mathbb{N}$, lahko točko (x,y) s to lastnostjo najdemo poljubno blizu $(0,0)$, torej $(0,0)$ ni lokalni maksimum.

Analogno s pomočjo točk $(x,y) = (1/n, -1/n)$ dokažemo, da $(0,0)$ ni lokalni minimum.

---

4. Naloga

Poišči in klasificiraj ekstreme funkcije

$$f(x,y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{4}{y} .$$

Rešitev:

Rešitev:

Poiščemo najprej stacionarne točke:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{2}{x^2} = 0 \quad / \cdot x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{4}{y^2} = 0 \quad / \cdot y^2$$

↳ ① $x^2 y - 2 = 0 \quad / : xy \quad \leadsto \quad x = \frac{2}{xy}$

② $x y^2 - 4 = 0 \quad / : xy \quad \leadsto \quad y = \frac{4}{xy} = 2x$

↳ Vstavimo v ①: $x^2 \cdot 2x - 2 = 0 \quad / : 2$

$$x^3 - 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$y = 2x = 2$$

↳ f ima stacionarno točko v $(x,y) = (1,2)$.

Določimo še Hessejevo matriko:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y - \frac{2}{x^2}\right) = \frac{4}{x^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y - \frac{2}{x^2}\right) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x - \frac{4}{y^2}\right) = 8/y^3$$

↳ $H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 4/x^3 & 1 \\ 1 & 8/y^3 \end{bmatrix}$; $H_f(1,2) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =: H$

Velja $\lambda_1 \lambda_2 = \det H = 4 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 3$

Ker je produkt pozitiven, sta obe lastni vrednosti λ_1, λ_2 neničelni in imata isti predznak. Ali sta pozitivni ali negativni bomo ugotovili s pomočjo sledi matrike H.

Naj bo $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ matrika velikosti $n \times n$. Definiramo sled matrike A s predpisom $\mathrm{sl}\, A = \mathrm{tr}\, A = a_{11} + \cdots + a_{nn}$

iz angleščine: „trace" ;

torej je sled matrike vsota njenih diagonalnih komponent. Če izračunamo karakteristični polinom $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ vidimo, da je $\pm \mathrm{tr}\, A$ ravno koeficient pri potenci λ^{n-1}. Hkrati velja

$$p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda) =$$
$$= \lambda_1 \cdots \lambda_n + c_1 \lambda + \cdots + (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) \cdot (-\lambda^{n-1}) + (-\lambda)^n$$

Sledi: $\mathrm{tr}\, A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$, tj. sled matrike A je ravno vsota njenih lastnih vrednosti!

Vrnimo se k nalogi. Vemo:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det H > 0 \,; \qquad H = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ker je $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} H = 4 + 1 = 5 > 0$,

mora biti vsaj ena lastna vrednost pozitivna.

Ker imata enak predznak, sta torej obe

pozitivni. Sledi, da ima f v točki $(1,2)$

lokalni minimum.