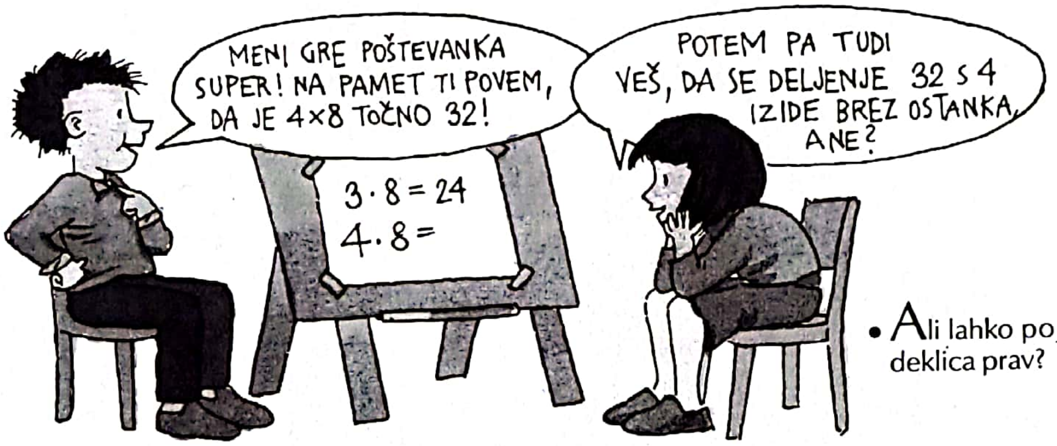
1 Večkratniki in delitelji



- Ali lahko pojasniš, zakaj ima deklica prav?

Večkratniki

Množenec · množitelj = zmnožek
1. faktor · 2. faktor = produkt
$V_6 = \{6, 12, 18, \ldots\}$ je **množica večkratnikov**

Ponovimo poštevanko števila 6:

$1 \cdot 6 = 6$	$3 \cdot 6 = 18$	$5 \cdot 6 = 30$
$2 \cdot 6 = 12$	$4 \cdot 6 = 24$	$n \cdot 6 = 6 \cdot n; \quad n \in \mathbb{N}$

Števila 6, 12, 18, 24, 30 … sestavljajo *zaporedje večkratnikov števila 6.* V zaporedju naštejemo samo nekaj prvih zaporednih večkratnikov. Naštevanje začnemo z najmanjšim večkratnikom, z znakom … pa nakažemo, da jih je neskončno mnogo.

❶ **Zaporedje** večkratnikov števila 5 je 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 …

❷ Pet **poljubnih** večkratnikov števila 5 je 15, 45, 50, 555 in 5005.

❸ Števila 21, 28, 35 so trije **zaporedni večkratniki** števila 7.

❹ 35 je **5-kratnik** števila 7 pa tudi **7-kratnik** števila 5.

❺ 30 **je večkratnik** števila 5, ker je $30 = 6 \cdot 5$.
31 **ni večkratnik** števila 5, ker ni takega števila, da bi bil njegov produkt s številom 5 enak 31. Velja pa $31 = 6 \cdot 5 + 1$.

***Zaporedni večkratniki števila** a* **so:** $1 \cdot a, 2 \cdot a, 3 \cdot a \ldots 345 \cdot a, 346 \cdot a \ldots$

Delitelji

Iz produkta $72 = 12 \cdot 6$ vidimo, da je število 72 večkratnik števila 6. To pokaže tudi račun $72 : 6 = 12$. Deljenje se izide brez ostanka. Količnik je naravno število. To lahko povemo na več načinov:

72 je večkratnik števila 6 ali
72 je deljivo s številom 6 ali
število 6 je *delitelj* števila 72.

❻ 8 **je delitelj** števila 24, ker je $24 : 8 = 3$. Ostanka ni.
8 **ni delitelj** števila 25, ker je $25 = 3 \cdot 8 + 1$. Ostanek je 1.

Deljenec : delitelj = količnik

***Delitelj števila** a* **je vsako število** b**, s katerim se deljenje** $a : b$ **izide brez ostanka.**

2 Pravili za deljivost produkta in deljivost vsote

• Premisli in pojasni tudi ti, kako je razmišljala deklica.

Deljivost produkta

Pridružimo se iznajdljivi deklici in se spomnimo na pravilo:

Množenje
1. faktor · 2. faktor = produkt
množenec · množitelj = zmnožek

Produkt je deljiv z vsakim od svojih faktorjev.

Pokažimo, kako si s tem pravilom olajšamo računanje.
Ne da bi množili, pokažimo, da je produkt $24 \cdot 235$*, ki je deljiv s 24 in 235, deljiv tudi s številom 3.*

Sklepajmo: Upoštevajmo, da je $24 = 3 \cdot 8$, in zato produkt $24 \cdot 235$ zapišimo kot večkratnik števila 3:

$$24 \cdot 235 = (3 \cdot 8) \cdot 235 = 3 \cdot (8 \cdot 235)$$

Ker je trikratnik deljiv s 3, je s 3 deljiv tudi produkt $24 \cdot 235 = 3 \cdot (8 \cdot 235)$, zato dobimo pri deljenju količnik 1880, ki je naravno število.

❶ Produkt $15 \cdot 12 = 180$ je deljiv s 5, ker je 15 deljivo s 5.
❷ Produkt $18 \cdot 24 \cdot 30 = 12960$ je deljiv z 8, ker je 24 deljivo z 8.

Vsaj en pomeni eden ali več.

Produkt *je deljiv* z danim številom, če je s tem številom deljiv vsaj en njegov faktor.

Deljivost vsote

Raziščimo, ali velja podobno pravilo tudi za vsoto.
Ne da bi sešteli, pokažimo, da je vsota $2100 + 35$ *deljiva s 7.*

Seštevanje
1. sumand + 2. sumand = suma
1. seštevanec + 2. seštevanec = vsota

Sklepajmo:
Ker sta oba seštevanca $2100 = 300 \cdot 7$ in $35 = 5 \cdot 7$ večkratnika števila 7, sta tudi deljiva s 7. Zato je tudi njuna vsota 2135 deljiva s 7:

$$2135 : 7 = (2100 + 35) : 7 = 2100 : 7 + 35 : 7 = 300 + 5 = 305$$

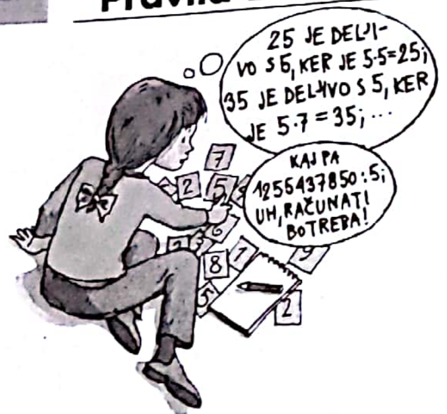
2136 pa ni deljivo s 7, ker je v razčlenjeni vsoti števila $2136 = 2100 + 36$ samo seštevanec 2100 deljiv s 7. Ugotovili smo:

Vsota *je gotovo deljiva* z danim številom, če so s tem številom deljivi vsi njeni seštevanci.

❸ 1648 je deljivo s 16, saj sta na primer seštevanca $1600 + 48$ deljiva s 16.
❹ Velika števila lahko razčlenimo na vsoto več seštevancev:
$481272 = 480000 + 1200 + 72$. Vidimo, da so vsi členi deljivi z 12, zato je tudi 481272 deljivo z 12.

⚠ Pokaži z računom, da tudi za deljivost **razlike** velja podobno pravilo kot za deljivost vsote? Napiši pravilo.

3 Pravila za deljivost z 2, s 5 in s potencami števila 10



- Razmisli, kako je s pravilom za deljivost z 10.
- Ali najdeš pri ugotavljanju deljivosti s števili 2, 5 in 10 kakšno povezavo?

Pravila za deljivost

Hitreje kot z *deljenjem* ugotovimo, ali je neko število deljivo z izbranim številom, če poznamo nekaj pravil.

Poglejmo v tabelah zapisana zaporedja večkratnikov števil 2 in 5 ter 10, 100 in 1000. V vsaki od njih opazimo številski vzorec.

Množenje s potencami 10

$235 \cdot 10 = 2350$
$235 \cdot 10^2 = 23500$
$235 \cdot 10^3 = 235000$

Deljenje s potencami 10

$2350 : 10 = 235$
$23500 : 100 = 235$
$235000 : 1000 = 235$

Večkratniki 2

2	4	6	8	10
12	14	16	18	20
22	24	26	28	30
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Večkratniki 5

5	10
15	20
25	30
35	40
⋮	⋮

Večkratniki 10, 100, 1000

Število	Zaporedni večkratniki
10	10, 20, 30, 40, 50 ...
100	100, 200, 300, 400, 500 ...
1000	1000, 2000, 3000, 4000, 5000 ...

V zaporedju večkratnikov števila 2, ki so *soda števila*, se ponavlja vzorec števk 2, 4, 6, 8, 0, s katerim se končujejo večkratniki. V zaporedju večkratnikov števila 5 se vsa števila končujejo s števko 0 ali 5. Večkratniki števila 10 se končujejo z vsaj eno ničlo, večkratniki števila 100 z vsaj dvema ničlama in večkratniki števila 1000 z najmanj tremi ničlami.
Upoštevajmo povezanost večkratnikov z deljivostjo in že sledi:

Naravno število je deljivo
z 2, če ima na mestu enic eno od števk 0, 2, 4, 6 ali 8,
s 5, če ima na mestu enic eno od števk 0 ali 5,
z 10, 100, 1000, če se končuje z vsaj eno, vsaj dvema ali vsaj tremi ničlami.

⚠ Natančno preberi pravilo o deljivosti števila s potencami števila 10 in pojasni kaj se skriva za besedico *vsaj*.

❶ 5232 je deljivo z 2, ker je 2 deljivo z 2.

❷ 5235 je deljivo s 5, ker je 5 deljivo s 5.

❸ 5230 je deljivo z 2, s 5 in z 10, ker se število končuje s števko 0.

Nalogo lahko rešimo tudi po pravilu o deljivosti produkta:
$5230 = 523 \cdot 10 = 523 \cdot 2 \cdot 5$ Sklepamo: Ker je produkt deljiv z vsakim od svojih faktorjev, je 5230 deljivo z 2, s 5 in z 10.

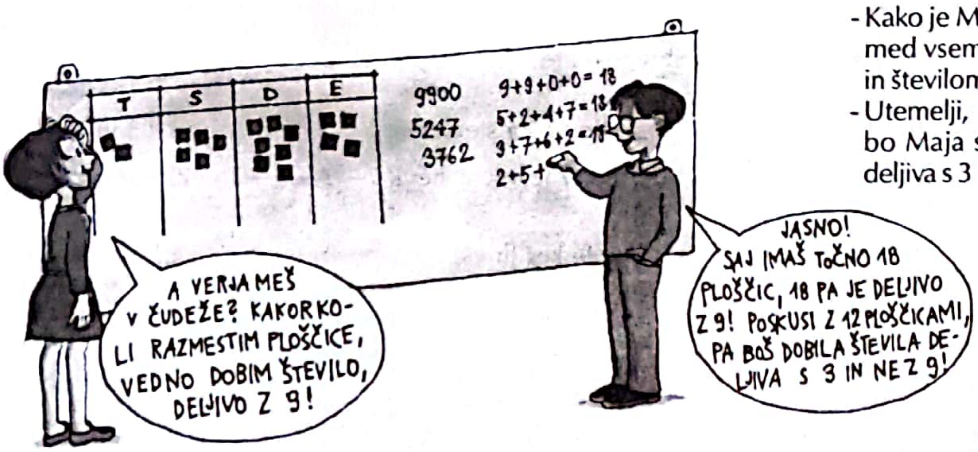
❹ 52300 je deljivo s 100, ker se končuje z dvema ničlama. Ker je zadnja števka 0, je deljivo tudi z 10, s 5 in z 2. Pokaži to še s pravilom o deljivosti produkta.

⚠ Pojasni, zakaj je število, ki je deljivo s 1000, deljivo tudi s 100, z 10, pa z 2 in s 5.

4 Pravila za deljivost s 3 in z 9

• Premisli in pojasni.

- Kako je Marko ugotovil povezavo med vsemi števili iz prve skupine in številom 18?
- Utemelji, da so vsa števila, ki jih bo Maja sestavila iz 12 ploščic, deljiva s 3 in ne z 9.



Deljivost s 3 in 9

1362 : 3 = 454
3900 : 3 = 1300
2631 : 3 = 877

990 : 9 = 110
4536 : 9 = 504
3618 : 9 = 402

Vsota števk števila 702 je $7 + 0 + 2 = 9$.

Pazljivi raziskovalec pri poskusu s prerazporejanjem 12 in 18 igralnih ploščic na mesto tisočic, stotic, desetic in enic hitro opazi zanimivo zvezo med nastalimi **števili** in **vsoto števk**, ki število sestavljajo.

T	S	D	E	Vsota števk
1	3	6	2	12
3	9	0	0	12
2	6	3	1	12

T	S	D	E	Vsota števk
9	9	0	0	18
4	5	3	6	18
3	6	1	8	18

Ne glede na razmestitev 12 ali 18 ploščic se vsota števk sestavljenih števil ujema z 12 ali 18. Poleg zvez: $12 = 3 \cdot 4$ in $18 = 2 \cdot 9$, ki povesta, da je prvo število deljivo s 3, drugo pa z 9, velja tudi naslednje pomembno pravilo:

Naravno število je deljivo
s 3, če je vsota njegovih števk deljiva s 3,
z 9, če je vsota njegovih števk deljiva z 9.

Število, ki je deljivo z 9, je deljivo tudi s 3.

❶ Preverimo, ali je število 8646 deljivo z 9 in s tem tudi s 3.

Namesto razvrstitve ploščic na polja mestnih vrednosti storimo to z računom, tako da število 8646 najprej *razčlenimo* v vsoto večkratnikov potenc števila 10:

$$8646 = 8 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 6 = 8 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 6$$

Zdaj razčlenimo še seštevance, tako da bodo vsi deljivi z 9 in s tem tudi s 3. To nam bo uspelo, če vse desetiške enote od 1000, 100 in 10 razčlenimo na naslednje vsote: $1000 = 999 + 1$ $\quad 100 = 99 + 1$ $\quad 10 = 9 + 1$.

$$\begin{aligned} 8646 &= 8 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 6 = \\ &= 8 \cdot (999 + 1) + 6 \cdot (99 + 1) + 4 \cdot (9 + 1) + 6 = \\ &= 8 \cdot 999 + 8 + 6 \cdot 99 + 6 + 4 \cdot 9 + 4 + 6 = \\ &= 8 \cdot \mathbf{999} + 6 \cdot \mathbf{99} + 4 \cdot \mathbf{9} + (8 + 6 + 4 + 6) \end{aligned}$$

5 Praštevila

- Premisli, poskusi in ugotovi, kdo bo moral sestaviti več pravokotnikov, Maja ali Peter? Zakaj? Pojasni.

Delitev naravnih števil

Št. deliteljev	Števila
1	1
2	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17
3	4, 9
4	6, 8, 10 14, 15
5	16
6	12, 18, 20

Na prvi pogled se zdi, da ima večje število vedno tudi več deliteljev. Prepričaj se, da ni tako. Poišči vse delitelje števil od 1 do 20 in jih zapiši v preglednico.
Pri iskanju deliteljev naravnih števil se izkaže, da imajo vsa naravna števila razen števila 1 dva ali pa različno mnogo deliteljev. Zato se dogovorimo:

- **Naravno število, ki ima natanko dva delitelja, je *praštevilo*.**
- **Praštevilo je deljivo samo z 1 in s samim seboj.**
- **Naravno število s tremi ali več delitelji je *sestavljeno število*.**
- **Število 1 ni niti praštevilo niti sestavljeno število.**

❶ Nekaj prvih zaporednih praštevil 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 …

❷ 6, 12, 44 so sestavljena števila, saj imajo več kot dva delitelja:
$D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$, $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $D_{44} = \{1, 2, 4, 11, 22, 44\}$.

Naravna števila so:
- 1,
- praštevila 2, 3, 5 …,
- sestavljena števila.

❸ Števili 11 in 41 sta praštevili. Obe imata natanko dva delitelja: $D_{11} = \{1, 11\}$, $D_{41} = \{1, 41\}$.

❹ 1 je deljivo samo s številom 1. Število 1 zato ni ne sestavljeno število in ne praštevilo.

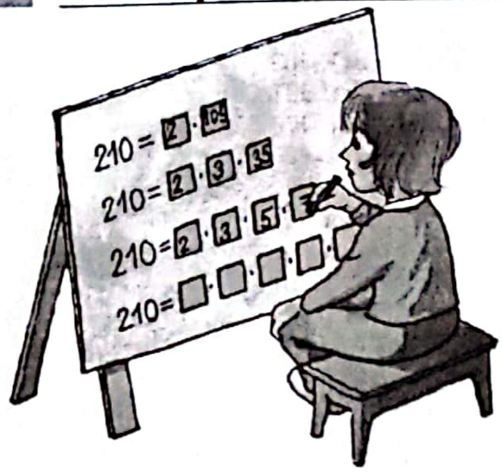
Iskanje praštevil, posebno velikih, ni preprosta naloga. Matematikom pomagajo danes pri tem zmogljivi računalniki, s katerimi so odkrili že zelo velika števila, ki bi jih zapisali na karirastem papirju (1 števka na en kvadratek) v več sto metrih dolgih številkah.

Nekaj doslej največjih znanih praštevil

Praštevilo	Število mest	Leto odkritja
$2^{13\,466\,917} - 1$	4 053 946	2001
$2^{6\,972\,593} - 1$	2 098 960	1999
$2^{3\,021\,377} - 1$	909 526	1998
$2^{2\,976\,221} - 1$	895 932	1997
$2^{1\,398\,269} - 1$	420 921	1996
$2^{1\,257\,787} - 1$	378 632	1996

Preprost postopek je že v 3. stoletju pr. n. št. odkril grški matematik *Eratosten* iz Kirene. Pravimo mu **Eratostenovo rešeto**. V prvi nalogi lahko ugotoviš, kako z Eratostenovim rešetom »presejemo« praštevila.

6 Razcep na prafaktorje



Metka poskuša število 210 zapisati na vse možne načine kot produkt dveh, treh ali več faktorjev. Pri tem morajo biti vsi faktorji večji od 1. Pri reševanju naloge si pomaga s shemo na risbi.
Pomagaj Metki. Razmisli:

- Ali si je shemo razcepa pripravila pravilno?
- Ali ima za razcep na dva faktorja, tri itd., vedno le eno samo možnost?

Razcep na prafaktorje

Delitev naravnih števil
Naravna števila
- 1
- praštevila: 2, 3, 5...
- sestavljena števila: 4, 6, 8, 9, 10...

Sestavljeno število 420 zapišemo kot produkt dveh naravnih števil, ki nista niti 1 niti število samo. Če faktorja še nista praštevili, postopek nadaljujemo toliko časa, da dobimo produkt samih praštevil. Na primer:

1. način:
$420 = 2 \cdot 210 =$
$= 2 \cdot 2 \cdot 105 =$
$= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 35 =$
$= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 =$
$= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

2. način:
$420 = 3 \cdot 140 =$
$= 3 \cdot 2 \cdot 70 =$
$= 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 14 =$
$= 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 =$
$= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

3. način:
$420 = 42 \cdot 10 =$
$= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 =$
$= 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 =$
$= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

Faktorja
↓
$4 \cdot 8 = 32$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$
Prafaktorji

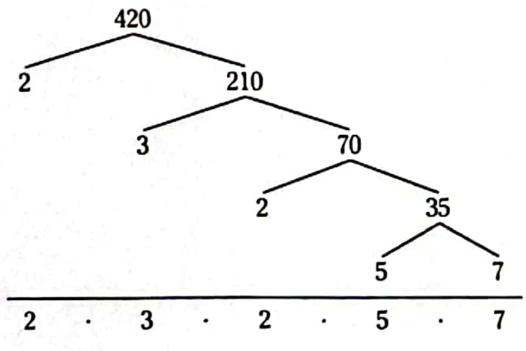
Potenca
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$

Ker so vsi faktorji v končnem produktu praštevila, jim rečemo *prafaktorji*. Postopek pa imenujemo *razcep na prafaktorje*. Prafaktorji istega števila so po razcepu enaki ne glede na to, s katerim številom smo začeli razcep. Produkt enakih prafaktorjev zapišemo pregledneje s potenco.

Iskanje prafaktorjev prikažemo tudi takole:

420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

Drevesni diagram



⚠ Poišči z diagramom še kak razcep števila 420.

1 Razcepimo števila 48, 260 in 1575. Produkt enakih faktorjev v razcepu zapišimo s **potenco.**

a) $48 = 2 \cdot 24 =$
$= 2 \cdot 2 \cdot 12 =$
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 =$
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 =$
$= 2^4 \cdot 3$

b) $260 = 2 \cdot 130 =$
$= 2 \cdot 2 \cdot 65 =$
$= 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13 =$
$= 2^2 \cdot 5 \cdot 13$

c) $1575 = 3 \cdot 525 =$
$= 3 \cdot 3 \cdot 175 =$
$= 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 35 =$
$= 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 =$
$= 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

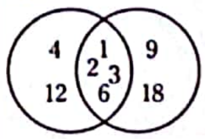
7

Največji skupni delitelj

• Razmisli in svetuj, kako se lahko reši problem tako, da bo delo opravljeno v prvem poskusu.

Skupni delitelji

Skupne delitelje D_{12} in D_{18} prikažemo z Vennovim diagramom:



Raziščimo delitelje števil 12 in 18 in poiščimo njune skupne delitelje.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D_{12}		1	2	3	4		6						12								
D_{18}		1	2	3			6			9									18		

Iz slike razberemo:
Iskani množici deliteljev števil 12 in 18 sta
$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ in $D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.
Števila 1, 2, 3, in 6 so *skupni delitelji* števil 12 in 18. Označimo jih z $D_{12} \cap D_{18}$, saj so elementi presečne množice obeh množic. Največji skupni delitelj števil 12 in 18 je število 6. To zapišemo: $D(12, 18) = 6$.

Tuji si števili

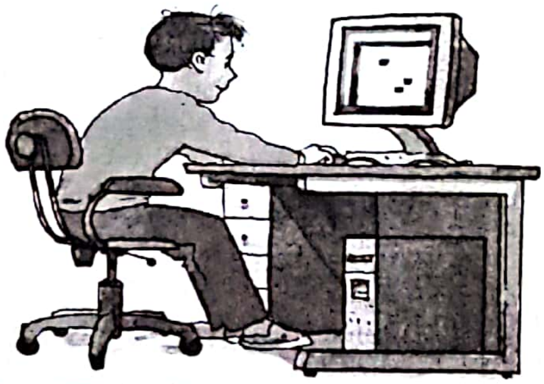
- **Delitelj, ki hkrati deli dve števili, je njun *skupni delitelj*.**
- ***Največji skupni delitelj* danih števil je največje število, s katerim sta ti števili deljivi.**
- **Števili z edinim skupnim deliteljem 1 imenujemo *tuji si števili*.**

❶ Poiščimo skupne delitelje števil 15 in 28.
$D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$,
$D_{28} = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$.
Edini skupni delitelj števil 15 in 28 je 1. Števili 15 in 28 sta tuji si števili, kar zapišemo $D(15, 28) = 1$.

Načini iskanja deliteljev

- Na pamet, pri manjših številih: $D(4, 24) = 4$ in $D(6, 15, 18) = 3$.
- S sklepanjem, pri večjih številih: 24 je delitelj števila 120, zato je $D(24, 120) = 24$.
  Ali:
  120 je večkratnik števila 24, zato je tudi $D(24, 120) = 24$.
- Kdaj tudi z naštevanjem:
  $D_{48} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$ in
  $D_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$.
  Iz zapisa ugotovimo, da imata števili 48 in 60 skupne deljitelje 1 2, 3, 4, 6 in 12. Največji med njimi je 12, torej $D(48, 60) = 12$.

8 Najmanjši skupni večkratnik



Peter si je 1. januarja začel dopisovati po e-pošti z Majo in s Katjo. Maji piše vsak šesti dan, Katji pa vsak osmi dan.

- Razmisli, ali Peter kdaj piše obema na isti dan.

Skupni večkratniki

Potek Petrovega dopisovanja si lahko ponazorimo na številskem traku. Opazujmo večkratnike števil 6 in 8:

V_6: 6 12 18 $\boxed{24}$ 30 36 42 $\boxed{48}$ 54 60 66 $\boxed{72}$ 78 84 90 $\boxed{96}$

n: 0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100

V_8: 8 16 $\boxed{24}$ 32 40 $\boxed{48}$ 56 64 $\boxed{72}$ 80 88 $\boxed{96}$

Vidimo:
Večkratniki števila 6 so 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48 ... Večkratniki števila 8 so 16, 24, 32, 40, 48 ... Števila 24, 48, 72 ... so skupna obema zaporedjema, zato pravimo, da so *skupni večkratniki* števil 6 in 8.
Če si večkratnike predstavljamo kot množici večkratnikov, pravimo:

Skupni večkratniki **danih množic so elementi njunih presečnih množic.**
$V_6 \cap V_8 = \{24, 48, 72 \dots\}$

Najmanjši skupni večkratnik

Vseh skupnih večkratnikov danih števil ne moremo našteti. Vsakemu večkratniku vedno sledi še večji večkratnik. Vedno pa lahko določimo *najmanjši* skupni večkratnik dveh števil. V našem primeru je to število 24, kar zapišemo $v(6, 8) = 24$.
Iz zveze $6 \cdot 8 = 24$, sledi: $24 : 6 = 4$ in $24 : 8 = 3$. Zato:

Najmanjši skupni večkratnik **dveh števil je najmanjše število, ki je deljivo z obema številoma.**

Iskanje skupnih večkratnikov

1. Najmanjši skupni večkratnik števil 6 in 8 poiščemo tako, da najprej naštejemo zaporedje večkratnikov enega, na primer, števila 6: 6, 12, 18, 24, 30, 36 ... in med njimi poiščemo prvo število, ki je deljivo tudi z 8. Prva tri števila niso deljiva z 8, število 24 pa je. Zato je $v(6, 8) = 24$.

2. Pri določanju najmanjšega skupnega večkratnika števil 7 in 14 naštevanje zaporedij večkratnika opustimo. Takoj ga ugotovimo na pamet. $v(7, 14) = 14$.

3. Tudi pri iskanju najmanjšega skupnega večkratnika števil 4 in 7, ki razen 1 nimata skupnega delitelja ($D(4, 7) = 1$), je naštevanje zaporedij obeh večkratnikov števila 4: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 ... in števila 7: 7, 14, 21, 28 ...) odveč. Iskano število je kar njun produkt, to je 28.

Najmanjši skupni večkratnik dveh tujih si števil je njun produkt.
$D(a, b) = 1 \Rightarrow v(a, b) = ab$