UNIVERZA V LJUBLJANI
PEDAGOŠKA FAKULTETA

ŠPELA FRANTAR

KOTNE FUNKCIJE IN POTENČNE VRSTE

DIPLOMSKO DELO

LJUBLJANA, 2020

UNIVERZA V LJUBLJANI
PEDAGOŠKA FAKULTETA
DVOPREDMETNI UČITELJ

ŠPELA FRANTAR

Mentor: izr. prof. dr. MARKO SLAPAR

KOTNE FUNKCIJE IN POTENČNE VRSTE

DIPLOMSKO DELO

LJUBLJANA, 2020

Zahvala

Zahvaljujem se mentorju, izr. prof. dr. Marku Slaparju, za strokovno pomoč, odzivnost in vse nasvete pri izdelavi diplomskega dela.

Posebna zahvala gre tudi moji družini in prijateljem, ki so me podpirali čez celoten čas študija.

Povzetek

Trigonometrični funkciji sinus in kosinus običajno vpeljemo geometrijsko s pomočjo razmerja stranic v pravokotnem trikotniku ali pa s pomočjo koordinat točk na enotski krožnici. V diplomskem delu bomo pokazali, kako lahko trigonometrične funkcije vpeljemo in prikažemo njihove lastnosti s pomočjo potenčnih vrst.

Ključne besede: številske vrste, funkcijske vrste, enakomerna konvergenca, potenčne vrste, trigonometrične funkcije

Abstract: Trigonometric functions are most often introduced geometrically by either using ratios of lengths of sides in right angle triangles or using coordinates of points on the unit circle. In this diploma thesis we plan to show how trigonometric functions can be introduced and their properties shown by using power series.

Key words: number series, function series, uniform convergence, power series, trigonometric functions.

Kazalo vsebine

Kazalo slik

1 Uvod

Trigonometrične funkcije v srednji šoli običajno definiramo geometrijsko s pomočjo razmerij stranic v trikotniku. Takšna definicija je seveda zelo primerna, saj nam omogoča dokaj elementarno dokazovanje trigonometričnih identitet in je tudi direktno uporabna pri reševanju geometrijskih problemov. Definicijo je ekvivalentno mogoče podati preko koordinat točk na enotski krožnici in tako število π povezati z obsegom krožnice.

Do manjših zadreg pridemo, ko želimo trigonometrične funkcije obravnavati analitično. Na primer, ko želimo pokazati zveznost in izračunati odvode. Geometrijski dokazi so v tem primeru sicer zelo intuitivni, vendar jih je težko narediti strogo formalno.

Namen diplomskega dela je podati alternativno definicijo trigonometričnih funkcij, ki temelji zgolj na teoriji funkcijskih vrst. Trigonometrične funkcije vpeljemo s pomočjo potenčnih vrst (Taylorjevih vrst). Tako se pri dokazovanju analitičnih lastnosti zlahka naslonimo na izreke, ki so posledica enakomerne konvergence vrst. Seveda pa postane potem dokazovanje bolj geometrijskih lastnosti nekoliko manj intuitivno.

V diplomskem delu najprej ponovimo osnovno teorijo številskih in funkcijskih vrst s poudarkom na potenčnih vrstah. Ogledali si bomo kriterije za določanje konvergence vrst, kot so Cauchyjev kriterij, Abelov izrek, Weierstrassov M test in drugi. Enakomerna konvergenca potenčnih vrst nam omogoča, da povežemo formalno odvajanje in integriranje vrst z odvodom in integralom vsote vrste.

V drugem delu diplomskega dela vpeljemo trigonometrične funkcije kot vsote potenčnih vrst in pokažemo, kako lahko trigonometrijske formule izpeljemo formalno, brez uporabe geometrije. Nato dokažemo, da se takšna definicija ujema z definicijo trigonometričnih funkcij preko enotske krožnice. Na koncu obravnavamo še aproksimacijo funkcije sinus s Taylorjevimi polinomi in podamo dokaz iracionalnosti števila π.

2 Funkcijske vrste

V tem poglavju bomo predstavili osnovno teorijo funkcijskih vrst, ki jo bomo potrebovali v nadaljevanju. Teorija je v večini povzeta po [3], [4], [5] in [6].

2.1 Številske vrste

Definicija 2.1 *Številska vrsta je vsaka formalna neskončna vsota oblike*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots,$$

kjer so $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *neka realna števila. Število* a_i *imenujemo i-ti člen vrste. Namesto* $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ *lahko pišemo krajše* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definicija 2.2 *Naj bo* $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ *številska vrsta. Vsota*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

je n-ta delna vsota številske vrste. Vrsta konvergira, če ima zaporedje $\{S_n\}$ *delnih vsot limito*

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

Limiti S v tem primeru rečemo vsota vrste in pišemo

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Če zgornja limita ne obstaja (ali je pozitivno ali negativno neskončna), rečemo da vrsta divergira.

Spomnimo se, če vrsta $\sum_{k=0}^{n} a_k$ konvergira, potem zagotovo velja, da je $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$, torej, če $\lim_{k \to \infty} a_k \neq 0$, potem je vrsta $\sum_{k=0}^{n} a_k$ zagotovo divergentna.

Vrsta je *absolutno konvergentna*, če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentna. Vsaka absolutno konvergentna vrsta je tudi konvergentna, vendar obratno ne velja nujno. Konvergentno vrsto, ki pa ni absolutno konvergentna, imenujemo *pogojno konvergentna* vrsta.

Kriterije za konvergenco potenčnih vrst običajno izpeljemo s pomočjo Cauchyjevrga kriterija, ki je posledica polnosti realnih števil, in primerjave z vrstami, za katere konvergenco poznamo.

Trditev 2.3 *(Cauchyjev kriterij)* Številska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za $m \geq n \geq n_0$ velja

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| = |a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m| < \varepsilon.$$

V posebnem primeru, ko je m = n, dobimo potreben pogoj za konvergenco, $a_n \to 0$.

Primer 2.4 Geometrijska vrsta je vsota členov geometrijskega zaporedja, in sicer

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^k = 1 + p + p^2 + p^3 + \cdots$$

n-to delno vsoto vrste označimo s S_n ; $S_n = 1 + p + p^2 + p^3 + \cdots + p^n$. Ker velja

$$pS_n = p + p^2 + p^3 + \cdots + p^{n+1} ,$$

pri $p \neq 1$, dobimo formulo

$$S_n = \frac{1 - p^{n+1}}{1 - p}.$$

Limita $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ obstaja natanko takrat, ko je $| p | < 1$ in je enaka

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-p}.$$

Geometrijska vrsta torej konvergira natanko za $| p | < 1$, njena vsota pa je enaka

$$1 + \mathrm{p} + \mathrm{p}^2 + \mathrm{p}^3 + \cdots = \frac{1}{1-p}.$$

Primer 2.5 Harmonična vrsta je vrsta, ki jo dobimo kot vsoto členov harmoničnega zaporedja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Označimo s S_n n-to delno vsoto in si jo oglejmo pri $n = 2^k$; kjer je $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$$\begin{aligned} S_{s^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^k} \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^k} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} \\ &= 1 + \frac{k}{2} \end{aligned}$$

Vrsta torej divergira. Na podoben način lahko pokažemo, da vrsta oblike

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

konvergira natanko tedaj, ko je $s > 1$.

Konvergenco vrst s pozitivnimi členi (oziroma absolutno konvergenco vrst) lahko pogosto preverimo s pomočjo korenskega oziroma kvocientnega kriterija, pri katerih uporabimo primerjavo vrste z geometrijsko vrsto.

Trditev 2.6 Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in označimo $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ter $Q_n = \sqrt[n]{a_n}$. Če katera od limit $D = \lim_{n\to\infty} D_n$, $Q = \lim_{n\to\infty} Q_n$ obstaja in je strogo manjša od 1, potem vrsta konvergira, če je strogo večja od 1, pa divergira.

Skica dokaza. Skicirajmo dokaz korenskega kriterija. Naj bo $Q < 1$ in $Q < Q' < 1$. Potem obstaja n_0, da za vsak $n > n_0$ velja $Q_n < Q'$, oziroma $a_n < Q'^n$. Iz konvergence geometrijske vrste s faktorjem Q' zaključimo, da vrsta konvergira. Če je $Q > 1$ lahko s podobnim sklepom in $Q > Q' > 1$ zaključimo, da vrsta divergira. Q.E.D

Definicija 2.7 *Alterenirajoča vrsta je številska vrsta oblike* $\sum(-1)^{n-1}a_n$ *, kjer je* $a_n > 0$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$.

Za ugotavljanje konvergence alternirajoče vrste imamo kriterij:

Trditev 2.8 (Leibnizov kriterij) Naj bo

$$\sum(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

alternirajoča vrsta, za katero velja $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \ldots$ Potem vrsta konvergira natanko tedaj, ko velja

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dokaz. Naj bo S_{2n} delna vsota vrste pri sodem indeksu 2n in S_{2n+1} delna vsota pri lihem indeksu 2n+ 1. Velja $S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2}$. Ker velja $a_{2n+1} \geq a_{2n+2}$ dobimo $S_{2n} \leq S_{2n+2}$. Podobno je $S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1}$ in zato $S_{2n+1} \leq S_{2n-1}$. Velja pa tudi $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} > S_{2n}$ in če malo pomislimo, dobimo $S_1 \geq S_3 \geq S_5 \geq \cdots \geq \cdots \geq S_6 \geq S_4 \geq S_2$. Označimo $S' = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}$, $S'' = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$. Obe limiti obstajata, saj je prvo zaporedje padajoče, drugo pa naraščajoče. Velja tudi $S' \geq S''$. Zaporedje delnih vsot S_n bo imelo limito natanko tedaj, ko bo $S' = S''$, kar pomeni $S' - S'' = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} S_{2n}, = \lim_{n\to\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = a_{2n+1} = 0$. S tem je trditev dokazana. Q.E.D.

S pomočjo Leibnizovega kriterija enostavno dobimo, da alternirajoča harmonična vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

pogojno konvergira.

2.2 Enakomerna konvergenca funkcijskih vrst

Funkcijska vrsta je formalna vrsta oblike $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ kjer so $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ realne funkcije, vse definirane na neki podmnožici $D \subseteq \mathbb{R}$.

Definicija 2.9 *Funkcijska vrsta konvergira (po točkah) proti funkciji* $f: D \to \mathbb{R}$, *če za vsak* $x \in D$ *velja* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$. *Funkcijska vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konvergira enakomerno proti funkciji* $f: D \to \mathbb{R}$, *še funkcijski zaporedje delnih vsot* $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$ *konvergira enakomerno proti* f. *To pomerni, da za vsak* $\varepsilon > 0$ *obstaja indeks* n_0, *da za vsak* $n \geq n_0$ *velja* $|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ *za vsak* $x \in D$.

Če funkcijska vrsta konvergira enakomerno, seveda konvergira tudi po točkah. Obratno pa ni nujno res. Če so členi funkcijske vrste zvezne funkcije na D, in vrsta konvergira enakomerno, je tudi vsota vrste zvezna funkcija.

Najbolj primeren kriterij za ugotavljanje enakomerne konvergence je *Weierstrassov M test*.

Izrek 2.10 (Weierstrassov M test) Naj bo

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

konvergentna vrsta s pozitivnimi členi in naj za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $|f_n(x)| \leq M_n$, za vsak $x \in D$. Potem funkcijska vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

konvergira enakomerno in absolutno na množici S.

Dokaz. Upoštevajmo zaporedje funkcije $S_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ konvergira in $M_n \geq 0$ za $\forall\, n$. Po Cauchyjevem kriteriju velja

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, n_0 : \forall n > m > n_0 \text{ velja } \sum_{k=m+1}^{n} M_k < \varepsilon.$$

Za tako izbran n_0 za $\forall x \in D$ velja za $\forall n > m > n_0$

$$|S_n(x) - S_m(x)| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq M_k < \varepsilon.$$

Torej zaporedje delnih vsot vrste konvergira enakomerno in zato vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergira enakomerno. Q.E.D.

Naslednja dva izreka nam povesta, kdaj lahko pri funkcijskih vrstah zamenjamo vrstni red integriranja oziroma odvajanja, ter vsote.

Izrek 2.11 Naj bodo f_n, $n \in \mathbb{N}$, zvezne funkcije, definirane na intervalu $[a, b]$ in naj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\,(x)$ konvergira enakomerno na $[a, b]$ k funkciji f. Tedaj je

$$\int_a^b f\,(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n\,(x)dx\,.$$

Dokaz. Naj bodo $S_n\,(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k\,(x)$ delne vsote naše vrste. Po predpostavki S_n enakomerno konvergirajo k f, ki je prav tako zvezna funkcija. Torej za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ za vsak $n \geq n_0$ in vsak $x \in [a, b]$. Torej je

$$|\int_a^b S_n(\mathrm{x})dx - \int_a^b f(x)| = |\int_a^b S_n(x) - f(x)dx| < \varepsilon \int_a^b 1 \cdot \mathrm{dx} = \varepsilon\,(\mathrm{b} - \mathrm{a}),$$

Torej je

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b f\,(x)\,dx\,,$$

kar smo želeli pokazati. Q.E.D.

Izrek 2.12 Če so funkcije f_{n} zvezno odvedljive na $[a, b]$ in je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'\,(x)$ enakomerno konvergentna na $[a, b]$, potem je

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'\,(x).$$

Dokaz. Naj bo $\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'\,(x)$ za vsak $x \in [a, b]$. Ker so $f_n{}'$ zvezne in ker vrsta enakomerno konvergira, je tudi $\tilde{f}$ zvezna na [a,b]. Po prejšnjem izreku lahko člen integriramo na vsakem intervalu $[a, x]$:

$$\int_a^x \tilde{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n'(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(x) - f_n(a)] = f(x) - f(a).$$

Torej za vsak $x \in [a, b]$ velja $\int_a^x \tilde{f}(t)dt = f(x) - f(a)$. Ker je $\tilde{f}$ zvezna funkcija na $[a, b]$, iz osnovnega izreka integralskega računa dobimo, da je f nedoločeni integral funkcije $\tilde{f}$, kar smo želeli pokazati. Q.E.D.

2.3 Potenčne vrste

Definicija 2.13 *Potenčna vrsta je funkcijska vrsta oblike*

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

pri čemer so koeficienti vrste a_i in center vrste a poljubna realna števila.

Potenčne vrste lahko zlahka razumemo kot vrste nad kompleksnimi števili, pri čemer so seveda lahko tako koeficienti kot tudi center vrste kompleksna števila.

Potenčna vrsta zagotovo konvergira v točki $x = a$. Območje konvergence lahko bolj natančno opišemo s pomočjo naslednjega izreka.

Izrek 2.14 Za potenčno vrsto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ obstaja tako število $R \in [0, \infty]$, da za vsak $r < R$ vrsta konvergira enakomerno in absolutno na zaprtem krogu $D(a, r)$ s polmerom r in središčem v a, in divergira za vsak x, za katerega velja $|x - a| > R$. Število R imenujemo konvergenčni polmer vrste in velja

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Dokaz. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $a = 0$. Naj bo $A = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Predpostavimo najprej, da je $0 < A < \infty$ in naj bo $|x| < \frac{1}{A}$. Potem je $1/|x| > A + \varepsilon$ za nek pozitiven ε, in ker je A največje stekališče množice $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$, obstaja tak n_0, da je

$$\sqrt[n]{|a_n|} < A + \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

Zato je za $n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}|x| \leq (A + \varepsilon)|x| < 1$$

in vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n||x|^n$ konvergira pri x po korenskem kriteriju. Naj bo sedaj $|x| > \frac{1}{A}$. Sedaj je $\frac{1}{|x|} > A - \varepsilon$ za nek $\varepsilon > 0$. Ker je A največje stekališče množice $\{\sqrt[n]{|a_n|}, n = 1, 2, \ldots\}$, za neskončno mnogo indeksov n velja $\sqrt[n]{|a_n|} > A - \varepsilon$. Pri takem n je

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}|x| > (A - \varepsilon)\,|x| > 1$$

in zato vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ne konvergira, saj členi $a_n x^n$ ne konvergirajo proti 0. Zelo podobno obravnavamo tudi primera $A = 0$ in $A = \infty$. Pokažimo še, da vrsta konvergira enakomerno in absolutno na $D(a, r)$, kjer je $r < R$. Naj bo $r < r' < R$. Ker vrsta pri $x = r'$ konvergira, velja

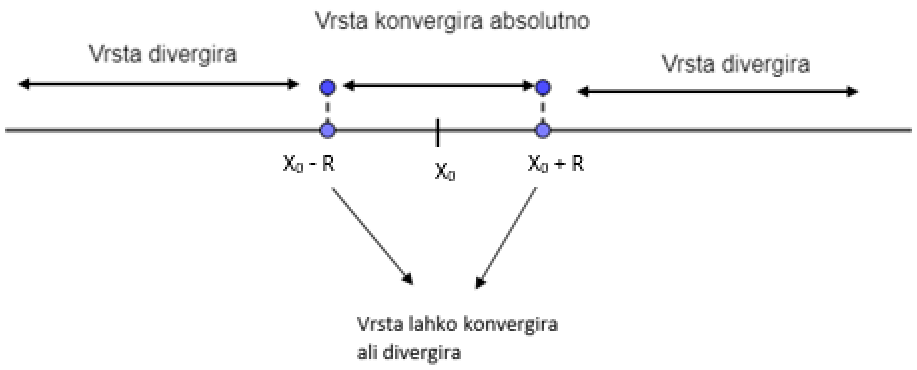
$\lim_{n\to\infty} a_n r'^m = 0$ in zato obstaja tak $M > 0$, da je $|a_n r'^n| \leq M$ za vsak n. Naj bo $|x| \leq r$ poljuben. Potem velja

$$|a_n x^n| = |a_n| (\frac{r}{r'})^n r'^n \leq \mathrm{M} (\frac{r}{r'})^n.$$

Zato velja

$$\sum_{n=0}^{\infty} | a_n x^n| < \sum_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{r}{r'}\right)^n,$$

in ker geometrijska vrsta na desni pri $\frac{r}{r'} < 1$ konvergira, vrsta po Weierstassovem M testu konvergira enakomerno in absolutno na $|x| \leq r$. Q.E.D.



Slika 1: Konvergenca in divergenca potenčne vrste

Zgornji izrek nam pove, da lahko na intervalu $(a - R, a + R)$, kjer je R konvergenčni radij, definiramo funkcijo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\mathrm{x} - \mathrm{a})^n.$$

Funkcija f je zvezna na intervalu $(a - R, a + R)$, saj vrsta na kompaktnih poditervalih konvergira enakomerno. Ker velja

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{|na_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{|a_n|/(n+1)},$$

tako formalno odvajana vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (\mathrm{x} - \mathrm{a})^n$$

kot formalno integrirana vrsta

$$C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} (\mathrm{x} - \mathrm{a})^n$$

imata isti konvergenčni radij kot prvotna vrsta. Ker vse tri vrste konvergirajo enakomerno na kompaktnih podintervalih znotraj $(a-R, a+R)$, velja

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\,n}$$

in

$$\int f(x)dx = C + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\,n}.$$

Z indukcijo vidimo, da je funkcija f razreda C^{∞}na intervalu $(a-R, a+R)$. Zgornji izrek nam ne da nobenih informacij glede konvergence vrste v robnih točkah intervala $(a-R, a+R)$. Izkaže se, da v kolikor vrsta v kakšni robni točki konvergira, potem lahko funkcijo f zvezno razširimo v tej robni točki. Spodnji dokaz Abelovega izreka je povzet po [2].

Izrek 2.15 (Abelov izrek) Naj bo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ realna potenčna vrsta s konvergenčnim radijem 1. Če $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira, velja

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \,.$$

Dokaz. Po predpostavki vrsta $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergira za $|x| < 1$. Označimo

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n$$

in

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \textstyle\sum_0^{\infty} a_n.$$

Enostavno lahko vidimo, da za vsak N velja

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n = x^N S_N + (1-x)\sum_{n=0}^{N-1} S_n x^n.$$

Ker velja $x^N S_N \to 0$, vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$$

torej prav tako konvergira za vsak $|x| < 1$ in dobimo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n.$$

Potem je

$$f(x) - S = (1-x)\sum_{0}^{\infty}(S_n - S)x^n,$$

kjer smo na desni strani uporabili enakost $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$. Naj bo N tak, da za vsak $n \geq N$ velja $|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$. Potem velja

$$
\begin{aligned}
|\,f(x) - S| \;&=\; \left|\,(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(S_n - S)x^n\,\right| \\
&\leq \left|(1-x)\sum_{n=0}^{N-1}(S_n - S)x^n\right| + \left|(1-x)\sum_{n=N}^{\infty}(S_n - S)x^n\right| \\
&< \left|(1-x)\sum_{n=0}^{N-1}(S_n - S)x^n\right| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}
$$

saj je

$$\left|(1-x)\sum_{n=N}^{\infty}(S_n - S)x^n\right| < \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\frac{x^N}{1-x} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sedaj si izberemo x dovolj blizu 1, da velja

$$\left|(1-x)\sum_{n=0}^{N-1}(S_n - S)x^n\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

S tem smo izrek dokazali. Q.E.D.

Primer 2.16 Oglejmo si potenčno vrsto

$$f(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \cdots$$

Konvergenčni radij vrste je enak 1, vrsta pa po Leibnizovem kriteriju konvergira tudi pri vrednosti $x = -1$. Ker je $f'(x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$, je

$$f(x) = -\ln(1-x)$$

in nam Abelov izrek da

$$-f(-1) = \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

2.4 Taylorjeva vrsta

Definicija 2.17 *Naj bo f neskončno krat odvedljiva v okolici točke* a. *Potenčno vrsto*

$$T(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

imenujemo Taylorjeva vrsta funkcije f v točki a.

Naj bo funkcija f taka, da ima njena Taylorjeva vrsta $T(x)$ v točki a pozitiven radij konvergence $R > 0$. Potem je $T(x)$ funkcija razreda C^∞ na $(a - R, a + R)$ in z odvajanjem lahko preprosto dobimo

$$T^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Torej je Taylorjeva vrsta $T(x)$ edina potenčna vrsta, ki se morda lahko v okolici točke a ujema s funkcijo f. Če v okolici točke a velja $f(x) = T(x)$ rečemo, da je funkcija f *analitična* v točki a. Analitičnost je odprt pogoj: če je f analitična v točki a, je analitična v okolici točke a.

Primer 2.18 Oglejmo si funkcijo $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Taylorjeva vrsta funkcije f v točki $a = 0$ je vrsta

$$T(x) = 1 + x + x^2 + \cdots,$$

saj je

$$f^{(n)}(0) = n!\,(1-x)^{-(n+1)}|_{x=0} = n!.$$

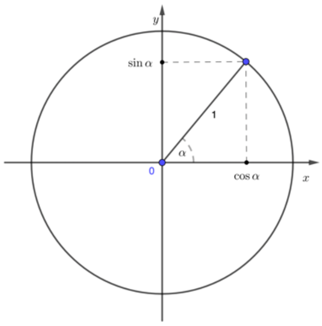
Ker velja

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

za $|x| < 1$, je funkcija f analitična na $(-1,1)$.

3 Trigonometrične funkcije

Trigonometrične funkcije običajno definiramo kot funkciji kotov v pravokotnem trikotniku; sinus kot razmerje med dolžino nasprotne katete in hipotenuze, kosinus pa kot razmerje med dolžino priležne katete in hipotenuze. Ekvivalentno lahko geometrijsko definiramo sinus in kosinus kot koordinati točk v enotskem krogu.



Takšni geometrijski definiciji sta zelo primerni za dokazovanje različnih geometrijskih identitet s pomočjo elementarnih geometrijskih orodij, manj primerni pa sta pri obravnavi analitičnih lastnosti kot sta na primer zveznost ali odvod. Glavni vir literature za to poglavje je [7].

3.1 Definicija funkcij sinus in kosinus s pomočjo potenčnih vrst

Definicija 3.1 *Realno funkcijo sin x definiramo kot vsoto potenčne vrste*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots,$$

funkcijo kosinus pa kot vsoto potenčne vrste

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots.$$

Obe funkciji seveda lahko definiramo kot funkcijo kompleksne spremenljivke x.

Ker velja

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty,$$

imata potenčni vrsti v definiciji obe konvergenčni radij, $R = \infty$ in sta zato funkciji $\sin x$ in $\cos x$ definirani za vsa realna (ali kompleksna) števila x. Obe funkciji sta razreda C^∞ in velja

$$\sin' x = \cos x$$

ter

$$\cos' x = -\sin x.$$

Obe enakosti dobimo s preprostim formalnim odvajanjem vrst. Zelo nazorno tudi vidimo, da je funkcija $\sin x$ liha, funkcija $\cos x$ pa soda.

3.2 Osnovne zveze med trigonometričnimi funkcijami

V tem razdelku bomo pokazali nekaj osnovnih zvez med trigonometričnimi funkcijami.

Trditev 3.2 Za vsak x velja enakost $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Dokaz. Označimo funkcijo $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$. Funkcija f je poljubno krat odvedljiva funkcija na $\mathbb{R}$, za katero velja $f(0) = 1$. Če funkcijo f odvajamo, dobimo

$$f'(x) = 2\sin x \cos x - 2\cos x \sin x = 0.$$

Iz Lagrangeovega izreka sledi, da je f konstantna funkcija, in ker velja $f(0) = 1$, je $f(x) = 1$ za vsak $x \in \mathbb{R}$ (enako bi lahko sklepali iz izreka o enoličnosti rešitev diferencialnih enačb, saj je funkcija f je rešitev diferencialne enačbe $y' = 0$ pri začetnem pogoju $y(0) = 1$). Q.E.D.

Preden pokažemo adicijske izreke, si poglejmo naslednjo lemo.

Lema 3.3 Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dvakrat odvedljiva funkcija, za katero velja

$$f''(x) + f(x) = 0$$

in

$$f(0) = f'(0) = 0.$$

Potem je $f(x) = 0$ za vse $x \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Definirajmo funkciji $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kot

$$F(x) = f(x)\cos x - f'(x)\sin x\,,$$
$$G(x) = f(x)\sin x + f'(x)\cos x\,.$$

Če obe funkciji F in G odvajamo, dobimo

$$F'(x) = -f(x)\sin x + f'(x)(\cos x - \cos x) - f''(x)\sin x = 0$$

in

$$G'(x) = f(x)\cos x + f'(x)(\sin x - \sin x) + f''(x)\cos x = 0.$$

za vse $x \in \mathbb{R}$. Zato sta funkciji F in G konstantni. Ker velja

$$F(0) = f(0)\cos 0 - f'(0)\sin 0 = f(0) = 0$$

in

$$G(0) = f(0) \sin 0 + f\,'(0) \cos 0 = f'(0) = 0,$$

sta funkciji identično enaki 0. Če iz enačb

$$0 = f(x) \cos x - f'(x) \sin x$$
$$0 = f(x) \sin x + f'(x) \cos x\,,$$

izrazimo f, tako da prvo enačbo pomnožimo s $\cos x$, drugo pa s $\sin x$ in seštejemo, dobimo

$$0 = f(x)(\cos^2 x + \sin^2 x) + f'(x)(\cos x \sin x - \sin x \cos x) = f(x).$$

S tem je lema dokazana. Q.E.D.

Seveda lahko veljavnost zgornje leme dobimo tudi direktno z uporabo enoličnosti rešitev diferencialnih enačb.

Trditev 3.4 Za funkciji $\sin x$ in $\cos x$ veljata adicijski formuli

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

in

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$

Dokaz. Za vsak y definirajmo

$$f_y(x) = \sin(x + y) - \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

Potem je

$$f_y'(x) = \cos(x + y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

in

$$f_y''(x) = -\sin(x + y) + \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Dobimo

$$f_y{}''^{(x)} + f_y'(x) = 0,$$

in ker velja

$$f_y(0) = \sin y - \sin 0 \cos y - \cos 0 \sin y = 0$$

ter

$$f_y'(x) = \cos y - \cos 0 \cos y + \sin 0 \sin y = 0,$$

je za vsak y funkcija $f_y(x)$ identično enaka 0 po prejšnji lemi. S tem pokažemo prvo adicijsko formulo. Dokaz druge formule je povsem analogen. Q.E.D.

Iz adicijskih formul takoj med drugim dobimo formule za dvojne kote

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

in

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

formule za polovične kote

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x$$

in

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$$

ter formule za produkte

$$2\sin x \cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y),$$
$$2 \cos x \cos y = \cos(x + y) + \cos(x - y),$$
$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y).$$

Da pokažemo trigonometrične formule, ki vsebujejo konstanto π , kot sta na primer $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ in $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, bomo najprej vpeljali število π. Kasneje bomo število π povezali z obsegom kroga in tako pokazali, da je naša vpeljava števila π ekvivalentna klasični definiciji.

Poglejmo si vrednost funkcije $\cos x$ v točki $x = 2$:

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{4^2}{4!} - \cdots < 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = -\frac{1}{3} < 0.$$

Ker je $\cos 0 = 1 > 0$ in je funkcija $\cos x$ zvezna, med vrednostima $x = 0$ in $x = 2$

obstaja vsaj ena ničla funkcije $\cos x$.

Definicija 3.5 *Naj bo* $a = inf\ \{x > 0; cos\ x = 0\}$. *Definiramo* $\pi = 2a$.

Ker je funkcija $\cos x$, zvezna je $\cos a = 0$, kjer je a število iz zgornje definicije. Število $\pi/2$ je torej najmanjša (prva) pozitivna ničla funkcije $\cos x$.

Trditev 3.6 Velja $\cos x > 0$ za vse $x \in [\,0, \frac{\pi}{2}\,)$ in $\sin x > 0$ za vse $x \in (\,0, \frac{\pi}{2}\,]$. Posledično velja $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Dokaz. Ker je $\cos 0 = 1 > 0$ in je $\frac{\pi}{2}$ prva pozitivna ničla funkcije $\cos x$, je seveda $\cos x > 0$ za vse $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ker je $\sin' x = \cos x > 0$ za $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, je funkcija $\sin x$ strogo naraščajoča na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ker je $\sin 0 = 0$, je seveda $\sin x > 0$ za vse $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Iz enakosti $\sin^2 \frac{\pi}{2} + \cos^2 \frac{\pi}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$ potem sledi $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Q.E.D.

S pomočjo adicijskih izrekov sedaj dobimo

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x - \cos\frac{\pi}{2}\sin x = \cos x$$

in

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x = \sin x.$$

Zato imamo

$$\sin\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

in

$$\cos\pi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$$

ter zato zopet z adicijskimi formulami

$$\sin(x + \pi) = -\sin x \text{ in } \cos(x + \pi) = -\cos x$$

Če vstavimo $x = \pi$, dobimo

$$\sin(2\pi) = 0 \text{ in } \cos(2\pi) = 1.$$

Trditev 3.7 Funkciji $\sin x$ in $\cos x$ sta periodični s periodo 2π, kar pomeni

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \text{ in } \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

Dokaz. Dokaz trditve preprosto sledi iz adicijskih formul z upoštevanjem $\sin(2\pi) = 0$ in $\cos(2\pi) = 1$. Q.E.D.

V naslednji trditvi povzemimo lastnosti funkcije $\sin x$ na intervalu $[0,2\pi]$. Lastnosti sledijo iz zgoraj dokazanih zvez; naraščanje in padanje ter konveksnot in konkavnost previrimo s pomočjo prvega oziroma drugega odvoda.

Trditev 3.8 Funkcija $\sin x$ je strogo naraščajoča na intervalih $(0, \frac{\pi}{2})$ ter $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ in strogo padajoča na $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Maksimalno vrednost 1 na intervalu $[0,2\pi]$ doseže v točki $x = \frac{\pi}{2}$, minimalno vrednost -1 pa v točki $x = \frac{3\pi}{2}$. Funkcija je strogo konkavna na intervalu $(0, \pi)$ in strogo konveksna na intervalu $(\pi, 2\pi)$. Funkcija ima na $[0,2\pi]$ ničle v točkah $x = 0, \pi, 2\pi$.
Analogno trditev bi seveda lahko napisali tudi za funkcijo $\cos x$.

3.3 Kotne funkcije in enotska krožnica

Enotska krožnica v $\mathbb{R}^2$ s središčem v izhodišču je množica točk

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}.$$

Poglejmo, da preslikava $F: [0,2\pi] \to$ ℝ^2, definirana kot

$$F(t) = (\cos t, \sin t),$$

preslika interval $[0,2\pi]$ natanko na množico K in je injektivna na $[0,2\pi)$. Ker velja $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, slika seveda leži v množici K. Poglejmo še, da za vsako točko $(x,y) \in K$ obstaja natanko en tak $t \in [0,2\pi)$, da je $F(t) = (x,y)$. Naj bo $(x,y) \in K$. Velja $-1 \leq y \leq 1$. Če je $y = -1$, je $x = 0$, in je $t = \frac{3\pi}{2}$. Če je $y = 1$, je $x = 0$, in je $t = \frac{\pi}{2}$. Če je $-1 < y < 0$, potem iz Trditve 3.8 in zveznosti sledi, da obstaja natanko ena vrednost $t_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$ in natanko ena vrednost $t_2 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, da je $\sin t_1 = \sin t_2 = y$. Če je $x = +\sqrt{1-y^2}$, je $(\cos t_1, \sin t_1) = (x,y)$, če pa je $x = -\sqrt{1-y^2}$, pa je $(\cos t_2, \sin t_2) = (x,y)$. Podobno lahko obravnavamo primere z $y = 0$ in $0 < y < 1$.

Preslikava $F(t) = (\cos t, \sin t)$, definirana na $[0,2\pi]$, torej regularno parametrizira enotsko krožnico kot enostavno sklenjeno krivuljo. Zato je dolžina enotske krožnice enaka

$$o(K) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos' t)^2 + (\sin' t)^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Obseg enotskega kroga je torej enak 2π. S tem smo povezali običajno definicijo števila π in Definicijo 3.5.

3.4 Aproksimacija trigonometričnih funkcij s Taylorjevimi polinomi

Taylorjevi vrsti funkcij $\sin x$ in $\cos x$, centrirani v točki 0, sta seveda kar potenčni vrsti, s katerima smo funkciji definirali, torej

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

in

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

Obe vrsti konvergirata za vsa realna števila. V tem razdelku bomo pogledali, kako dobro Taylorjevi polinomi obeh vrst aproksimirajo funkciji.

Izrek 4.1 (Taylorjev izrek o ostanku) Naj bo funkcija f $(n+1)$-krat odvedljiva funkcija na odprtem intervalu I, ki vsebuje točko a. Tedaj za vsak $x \in I$ obstaja ξ med a in x, da je

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Taylorjev izrek dokažemo z večkratno uporabo Rolleovega izreka in je nekakšna posplošitev Lagrangeovega izreka. Dokaz lahko bralec najde na primer v [3].

Definicija 4.2 *Naj bo funkcija f n-krat odvedljiva funkcija na odprtem intervalu I, ki vsebuje točko a. Polinomu*

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

rečemo Taylorjev polinom stopnje n.

Taylorjev izrek o ostankih lahko ekvivalentno zapišemo kot

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

pri čemer je ostanek R_n oblike $R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$. Če želimo oceniti, kako dobro Taylorjev polinom stopnje n aproksimira funkcijo f v neki točki x, moramo oceniti ostanek $R_n(x)$.

Taylorjeva vrsta funkcije $\sin x$ okrog točke 0 ima le lihe potence spremenljivke x, zato bomo gledali le Taylorjeve polinome lihe stopnje. Zanima nas torej, kako dobro polinom

$$T_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

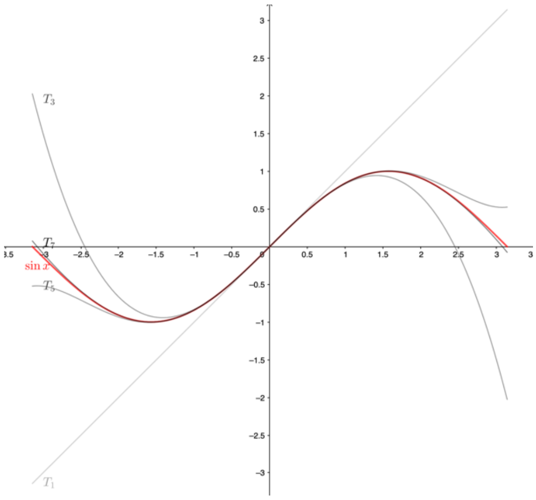
aproksimira funkcijo $\sin x$. Po Taylorjevem izreku o ostankih velja

$$|\sin x - T_{2n+1}(x)| = \left|\frac{\sin^{(2n+2)}\xi}{(2n+2)!}x^{2n+2}\right| \leq \frac{|x^{2n+2}|}{(2n+2)!}.$$

Ocena nam pove, da moramo pri večjih vrednostih $|x|$ za enako dobro oceno uporabiti Taylorjeve polinome višje stopnje. Omejimo se na kompakten interval $[-M, M]$. Potem imamo za vsak $x \in [-M, M]$ oceno

$$|\sin x - T_{2n+1}(x)| \leq \frac{M^{2n+2}}{(2n+2)!} < \left(\frac{Me}{2n+2}\right)^{2n+2} \frac{1}{\sqrt{2\pi(2n+2)}},$$

pri čemer smo v zadnji neenakosti uporabili Sterlingovo aproksimacijo [4]. Kot lahko vidimo, bodo Taylorjevi polinomi stopnje $2n+1$ na $[-M, M]$ hitro konvergirali proti funkciji, ko bo $Me < 2n+2$, oziroma $n > \frac{Me}{2} - 1$. Na intervalu $[-\pi, \pi]$ torej Taylorjevi polinomi stopnje večje ali enake 9 že zelo dobro aproksimirajo funkcijo $\sin x$.



Slika 2: Aproksimacija funkcije sin x na intervalu [-π,π].

Seveda bi lahko podobno analizo naredili tudi za funkcijo $\cos x$.

3.5 Iracionalnost števila π

V tem razdelku bomo predstavili še dokaz iracionalnosti števila π. Dokaz smo povzeli po [1].

Izrek 4.3 Število π je iracionalno število.

Dokaz. Predpostavimo, da je $\pi = a/b$, kjer sta a in b naravni števili. Za vsako naravno število n definirajmo polinom

$$p_n(x) = b^n \frac{x^n(\pi - x)^n}{n!} = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!}.$$

Za vsak $x \in (0, \pi)$ je polinom $p_n(x)$ je strogo pozitiven in velja ocena

$$0 < p_n(x) \leq \frac{(b\pi^2)^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Vrednosti vseh odvodov polinoma $p_n(x)$ v točkah $x = 0$ in $x = \pi$ so cela števila. V točki 0 to lahko preprosto vidimo s pomočjo binomskega izreka, v točki π pa uporabimo enakost $p_n(x) = p_n(\pi - x)$.

S pomočjo dvakratne uporabe integracije po delih dobimo

$$\int_0^\pi p_n(x) \sin x \, dx = p_n(0) + p_n(\pi) - \int_0^\pi p_n''(x) \sin x \, dx.$$

Če postopek integracije po delih nadaljujemo, dobimo na koncu

$$\int_0^\pi p_n(x)\sin x\,dx = p_n(0) + p_n(\pi) - p_n''(0) - p_n''(\pi) + \cdots + (-1)^n\left(p_n^{(2n)}(0) + p_n^{(2n)}(\pi)\right).$$

Torej je integral $\int_0^\pi p_n(x)\sin x\,dx$ za vsak n celo število, ki je nujno strogo večje od 0, saj je $p_n(x)\sin x$ strogo pozitivna funkcija na $(0,\pi)$. Ker pa po drugi strani velja

$$\int_0^\pi p_n(x)\sin x\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

smo dobili protislovje. Q.E.D.

Literatura

[1] Conrad, K., *Irrationality of pi and e*, https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/analysis/irrational.pdf. Pridobljeno 10. 8. 2020

[2] Conrad, K., *Boundary behavior of power series: Abel's theorem*, https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/analysis/abelthm.pdf. Pridobljeno 10. 8. 2020

[3] Globevnik, J., Brojan, M., *Analiza 1*, https://www.fmf.uni-lj.si/~globevnik/skripta.pdf., 2012. Pridobljeno 23. 1. 2019

[4] Rudin, W., *Principles of mathematical analysis*, Third edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf. x+342 pp., 1976.

[5] Slapar, M., *Zapiski predavanj iz matematične analize. http://hrast.pef.uni-lj.si/~slaparma/MA.pdf.* Pridobljeno: 23. 1. 2019

[6] Slapar, M., *Zapiski predavanj Osnove matematične analize. http://hrast.pef.uni-lj.si/~slaparma/MA.pdf.* Pridobljeno: 23. 1. 2019

[7] Yung, P. L., Some properties of trigonometric functions, https://www.math.cuhk.edu.hk/course_builder/1415/math1010c/trig.pdf. Pridobljeno 23. 1. 2019