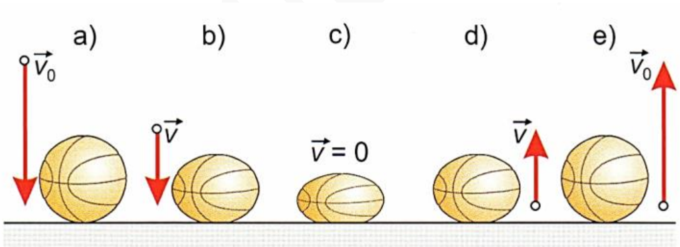
6.6 PROŽNOSTNA ENERGIJA

Izrek o kinetični in potencialni energiji vedno natančno drži, ***če se telo pri gibanju ne deformira, torej če je telo togo***. Pri netogem telesu pa se na njegovo veljavnost ne moremo zanesti. Primerov je veliko. Ko gnetemo testo, opravljamo delo, saj s silami premikamo dele testa. Kljub delu testo nima na koncu nobene kinetične energije. Ko z žlico mešamo juho, tudi opravimo delo, ker potiskamo žlico z določeno silo. Vendar se juha kmalu ustavi, tako da izgubi svojo kinetično energijo. Ko meljemo kavo, ko nasekamo drva, ko olupimo jabolka, opravljamo delo, ne da bi tem telesom dajali kaj dosti kinetične ali potencialne energije. Delo se v teh primerih pač ne porabi za povečanje kinetične ali potencialne energije, temveč za deformacijo teles.

Delo pri deformaciji teles

Iz prvega letnika vemo, da je deformacija lahko prožna (elastična) ali neprožna (plastična). Prožno deformirano telo se povrne v prvotno obliko, ko zunanja sila (ki telo deformira) preneha delovati. Neprožno deformirano telo pa tudi po prenehanju delovanja sile ostane vsaj delno deformirano. Kepa plastelina se ob padcu na podlago prilepi nanjo in obmiruje. Ko prenehamo gnesti kepo testa, ta obmiruje in med deformacijo opravljenega dela ne vrne v obliki kinetične energije. Opazimo pa, da se kepa testa med gnetenjem segreje (tudi roke, ki gnetejo, se segrejejo). Sklepamo, da je šlo s plastično deformacijo telesa oddano delo za spremembo njegove **notranje energije**.



Slika 1

Drugače je pri prožni deformaciji telesa. Prožno deformirano telo po razbremenitvi vrne celotno vloženo delo v obliki kinetične energije. Recimo, da prožna žoga s hitrostjo v_0 pade na trda tla. Tik pred udarcem ob tla ima kinetično energijo $\frac{1}{2}mv_0^2$ (slika 1 a). Po dotiku se začne ustavljati in se obenem deformira, njena kinetična energija se zmanjšuje, poveča pa se deformacija žoge (slika 1 b). Ko se žoga ustavi, je najbolj deformirana (slika 1 c) in vsa kinetična energija gre za prožno deformacijo žoge. Nato začne žoga vračati vloženo delo v obliki kinetične energije (slika 1 d), začne se dvigati. Na koncu, ko stik med žogo in tlemi preneha, je spet okrogla (nedeformirana) in se s celotno prvotno kinetično energijo $\frac{1}{2}mv_0^2$ odbije od tal (slika 1 e).

Pri padcu kepe plastelina, ki se deformira plastično, se ta ne odbije od tal, fazi d) in e) na sliki 1 odpadeta.

Videti je, da smo na sledi novi obliki energije, ki jo imajo deformirana (napeta, stisnjena, skrčena, upognjena ...) prožna telesa; pravimo ji **prožnostna energija** (***W_{pr}***). Ta je enaka vloženemu delu. Seveda pa mora biti deformacija telesa povsem prožna, kot na primer pri prožni vzmeti.

Delo in prožnostna energija vijačne vzmeti

Prožnostna energija je tem večja, čim bolj je telo deformirano, saj je za večjo deformacijo potrebno večje delo. Računanje tega dela je v splošnem zahtevno. Razmeroma preprosto je izračunati delo pri raztezanju (ali stiskanju) prožne vijačne vzmeti. Napeta vzmet deluje na okolico po Hookovem zakonu s silo $F_{vz} = kx$, kjer je k konstanta oz. prožnostni koeficient vzmeti, x pa raztezek vzmeti. Smer sile vzmeti je taka, da skuša vzmet vrniti v neobremenjeno stanje. Opisali bomo zelo počasno (da se ni treba ozirati na kinetično energijo) raztezanje lahke prožne vzmeti, ki je na enem krajišču togo vpeta v steno (slika 2). Najprej naj bo vzmet raztegnjena za x_1, na koncu pa za x_2. Koordinatni sistem postavimo tako, da je raztezek vzmeti enak koordinati konca vzmeti – to pomeni, da je izhodišče tam, kjer je premično krajišče neobremenjene vzmeti, os pa kaže stran od vzmeti. Če vzmet razpenjamo počasi, je ves čas v ravnovesju. Sila, s katero jo napenjamo (sila roke), je ves čas nasprotna in enako velika sili vzmeti: $\vec{F}_r = -\vec{F}_{vz}$. Silo roke uravnovesi sila stene na togo vpetem krajišču vzmeti. Čeprav je rezultanta na vzmet v tem primeru enaka nič, pa delo posameznih sil ni enako nič. Delo rezultante je enako nič in to ustreza spremembi kinetične energije vzmeti.

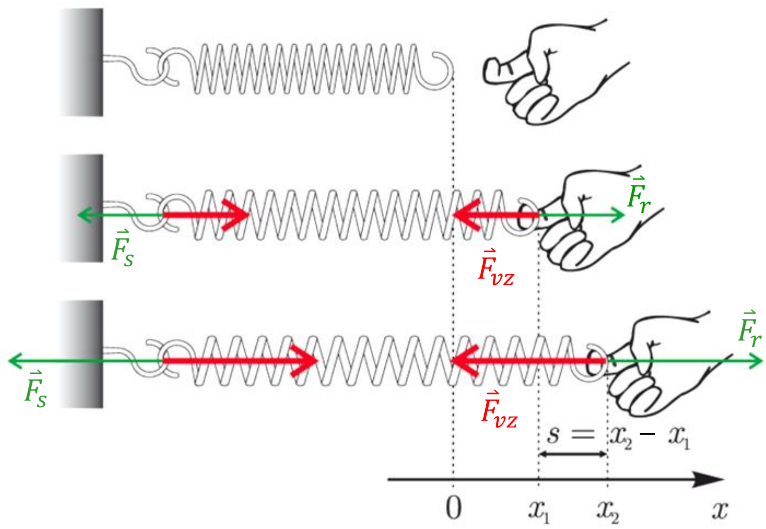
Sila stene ne opravlja dela, ker njeno prijemališče miruje, roka pa delo opravi. Opravljeno delo se torej ne pretvori v kinetično energijo, ampak v neko drugo obliko mehanske energije, ki pa je pri prožnem telesu posebna – je namreč zaloga dela in prožno telo pri vrnitvi v ravnovesno stanje lahko odda toliko dela, kot ga prejme.

Delo sile roke je pozitivno, saj ima premik prijemališča enako smer kot sila roke. Med raztezanjem se sila vzmeti povečuje premo sorazmerno z raztezkom vzmeti x, zato je delo A_r, ki je potrebno za raztezek vzmeti, produkt povprečne sile roke in premika s:

$$A_r = \overline{F}_r\, s \cdot \cos 0° = \overline{F}_r\,(x_2 - x_1)$$

Ker sila F_r narašča premo sorazmerno z raztezkom vzmeti, je njena povprečna vrednost aritmetična sredina začetne in končne vrednosti:

$$\overline{F}_r = \frac{kx_1 + kx_2}{2}$$



Slika 2: Raztegovanje lahke vzmeti. Zgoraj: vzmet je v neobremenjenem stanju brez energije in nanjo ne delujejo sile (težo zanemarimo). Sredina in spodaj: napeta vzmet – sila roke v zeleni barvi kaže v desno, sila vzmeti (rdeča puščica) kaže v levo, v nasprotni smeri premika pri raztegovanju. Vzmet uravnovesi sila stene (zelena puščica v levo na levem krajišču vzmeti).

Delo, ki ga opravi roka med raztezanjem vzmeti, je enako:

$$A_r = \overline{F}_r\, s = \frac{kx_2 + kx_1}{2} \cdot (x_2 - x_1) = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$$

Roka odda, vzmet pa prejme delo. Zaradi prejetega dela se spremeni stanje vzmeti. Njeno težišče ostane na enaki višini, hitrost pa se ne spremeni. Delo sile, ki razteza prožno vijačno vzmet, je enako razliki med začetno in končno vrednostjo izraza $\frac{1}{2}kx^2$, ki opisuje stanje vzmeti. Podobno kot smo prej vpeljali potencialno energijo (glejte poglavje 6.4, str. 2), vpeljemo zdaj ***prožnostno energijo vzmeti***:

$$\boxed{\boldsymbol{W_{pr} = \frac{1}{2}kx^2}}$$

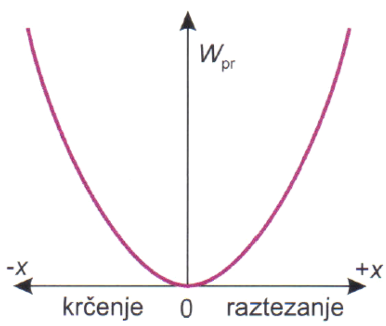
Zgornja enačba dobi sedaj obliko:

$$A = W_{pr2} - W_{pr1} = \Delta W_{pr},$$

ki jo imamo lahko za *izrek o prožnostni energiji: delo zunanjih sil je enako spremembi prožnostne energije.*

Tudi pri stiskanju vzmeti opravimo delo, pri čemer je x negativen (imenujemo ga tudi *skrček* vzmeti), prožnostna energija, ki je sorazmerna z njegovim kvadratom, pa je *vselej pozitivna* (graf na sliki 3).

Prožnostno energijo povzroči delovanje notranjih sil med gradniki (molekulami) prožnih teles. Med raztezanjem telesa njegova prožnostna energija narašča, ko se telo vrača v nedeformirano stanje, jo z delom vrača okolici.



Slika 3: Odvisnost prožnostne energije od raztezka prožne vzmeti.

○ ***Naloga 94:*** Vijačno vzmet s konstanto 20 N/cm stisnemo za 8,0 cm. Koliko dela opravimo? Stisnjeno vzmet nekoliko popustimo, da se raztegne le za 2,0 cm. Za koliko se pri tem zmanjša njena prožnostna energija?

● k = 20 N/cm = $\dfrac{20\text{ N}}{0{,}01\text{ m}}$ = 2000 N/m

x_1 = 8,0 cm = 0,080 m
x_2 = 2,0 cm = 0,020 m

A = ?
ΔW_{pr} = ?

Ko vzmet stisnemo za x_1, opravimo delo A in za toliko se vzmeti poveča prožnostna energija:

$$\Delta W_{pr} = W_{pr1} = \tfrac{1}{2} k x_1^2 = A\,.$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2000\,\frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0{,}080\text{ m})^2 = \underline{\underline{6{,}4\text{ J}}}$$

Ker je nov raztezek 4-krat manjši, je prožnostna energija 16-krat manjša.

Pri manjšem raztezku x_2 je nova prožnostna energija vzmeti enaka:

$$W_{pr2} = \frac{1}{2} k x_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 2000\,\frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0{,}020\text{ m})^2 = \underline{0{,}4\text{ J}}$$

Razlika obeh prožnostnih energij je enaka:

$$\Delta W_{pr} = W_{pr1} - W_{pr2} = 6{,}4\text{ J} - 0{,}4\text{ J} = \underline{6{,}0\text{ J}}.$$

Prožnostna energija vzmeti se je torej zmanjšala za 6,0 J.

Na sliki 1 smo opazovali, kako se prožnostna energija deformirane prožne žoge izkoristi kot vmesna energija pri prehodu med padanjem in dviganjem žoge. Nekaj podobnega se dogaja pri tenisu, ko z loparjem odbijemo žogo. Začetna kinetična energija žoge se s prožno deformacijo ob loparju začasno pretvori v prožnostno energijo deformirane žoge in deformiranega loparja, prožno stisnjena žoga in lopar nato vrneta začetno kinetično energijo. Tej energiji se prišteje še delo sile roke, ki zamahne z loparjem, tako da se žoga odbije od loparja s precejšnjo kinetično energijo. Počasen posnetek odboja teniške žogice od stene

Kinetično energijo telesa med padanjem najlažje pretvorimo v kinetično energijo za dviganje tako, da jo začasno pretvorimo v prožnostno energijo, na primer elastične opne. Tako poskakujemo na elastični ponjavi (trampolinu). Pri tem nožne mišice trpijo veliko manj, kot če bi odskakovali od trdih tal, saj jim ni treba s krčenjem shranjevati energije. To opravi namesto njih prožna opna.

Zanimivo je pretvarjanje energij pri skoku s palico. Pred odrivom od tal se palica ukrivi. Začetna kinetična energija se pretvori v prožnostno energijo palice, ki je potrebna za dvig skakalca. Med dviganjem se potencialna energija skakalca povečuje na račun njegove kinetične energije in prožnostne energije palice, ko se ta ravna. Ko se palica v pokončni legi izravna, se skakalec s skrčenima rokama sunkoma odrine od nje, pri čemer sile mišic rok opravijo dodatno delo, ki skakalca še nekoliko dvigne, skakalec preskoči letev.

6.7 IZREK O MEHANSKI ENERGIJI

Razširimo izrek o delu in energiji tako, da vanj vključimo še prožnostno energijo:

$$\boldsymbol{A = \Delta W_k + \Delta W_p + \Delta W_{pr}}$$

To enačbo imenujemo **izrek o mehanski energiji**, ki pravi, da delo sil, razen sile teže, spremeni kinetično, potencialno in prožnostno energijo skupine opazovanih teles oz. sistema. Prožnostno energijo pripišemo prožni deformaciji sistema. Če stisnemo vzmet, se poveča prožnostna energija vzmeti in vzmet to energijo lahko vrne kot delo. Če stisnemo plastelin, se poveča njegova notranja energija (segreje se). Te energije plastelin ne vrne z delom, ko obremenitev popusti, temveč kot toploto (več o tem v 8. poglavju).

Kdaj je v enačbi $A = 0$? Ko na sistem deluje le teža in če sile med telesi v sistemu opišemo s prožnimi silami (Hookov zakon), preostale sile pa ne opravljajo dela (bodisi njihovo prijemališče miruje bodisi so pravokotne na premik). Takrat se **mehanska energija sistema ohranja:**

$$\Delta W_k + \Delta W_p + \Delta W_{pr} = 0 \qquad \rightarrow \qquad W_k + W_p + W_{pr} = \text{konst.}$$

○ Vzmetna pištola ima vijačno vzmet, ki jo pri napenjanju stisnemo za 5,0 cm, za kar je potrebna sila 20 N. S pištolo izstrelimo 50 g težko kroglico. Kolikšno hitrost dobi, če je masa vzmeti majhna v primerjavi z maso kroglice? Kako visoko prileti kroglica, če jo izstrelimo navpično navzgor?

● x = 5,0 cm = 0,050 m
F = 20 N
m = 50 g = 0,050 kg

v = ?
h = ?

Najprej izračunajmo hitrost, s katero odleti kroglica iz pištole.

Ko vzmet stisnemo, opravimo delo A in za toliko se vzmeti poveča prožnostna energija:

$$\Delta W_{pr} = W_{pr} = \tfrac{1}{2} kx^2 = A\,.$$

Poiščimo prožnostni koeficient k. Da vzmet stisnemo za x, je potrebna sila $F = kx$, od koder dobimo:

$$k = \frac{F}{x} = \frac{20\ \mathrm{N}}{0{,}050\ \mathrm{m}} = \underline{400\ \mathrm{N/m}}$$

in od tu:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 400\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot (0{,}050\ \mathrm{m})^2 = \underline{0{,}50\ \mathrm{J}}\,.$$

Ko se vzmet sproži, opravi enako veliko delo A na kroglici, ki se ji za toliko poveča kinetična energija:

$\Delta W_k = W_k = A$. Od tu dobimo hitrost, s katero kroglica odleti iz pištole:

$$A = \frac{1}{2} m v^2 \quad \rightarrow \quad 2A = m v^2 \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{2A}{m} \quad \rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2A}{m}} = \sqrt{\frac{2\ 0{,}50\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}}}{0{,}050\ \mathrm{kg}}} = \underline{\underline{4{,}5\ \mathrm{m/s}}}$$

Če izstrelimo kroglico navpično navzgor, doseže višino h, ki jo dobimo iz izreka o kinetični in potencialni energiji:

$$W_k = W_p \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} m v^2 = mgh \rightarrow \quad v^2 = 2gh \quad \rightarrow \quad h = \frac{v^2}{2g} = \frac{20\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2}}}{2\ 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}} = \underline{\underline{1\ \mathrm{m}}}\,.$$