

1. OSNOVNI GEOMETRIJSKI POJMI

Gradivo za obravnavano snov se nahaja v e-učbeniku VEGA1, stran 1-24.

OSNOVE GEOMETRIJE V RAVNINI

Geometrija je veja matematike, ki jo je človek razvil z namenom lažjega razumevanja oblik, velikosti, lege in drugih lastnosti objektov v prostoru. Z geometrijo so v zgodovini povezana številna imena: Arhimed, Apolonij, Pitagora, Descartes, Euler, Gauss, Steiner, Kimberling, največji prispevek h geometriji pa je v prvem obdobju njenega razvoja prispeval Evklid.

Oglej si besedilo pod gumbi.

Evklid

Neevklidske geometrije

Fraktalna geometrija

Analitična geometrija

1. Izberi geometrijske pojme.

- ☐ Krožnica, premica, daljica.
- ☐ Trikotnik, kvadrat, piramida.
- ☐ Enačba, praštevila, ulomek.

2. Pri geometriji bomo poleg geometrijskega orodja, s katerim bomo risali konstrukcije v zvezek, uporabljali tudi računalniške programe za dinamično geometrijo. Nariši za vajo nekaj tipičnih geometrijskih objektov.

Nalogo reši na aktivni sliki v e-učbeniku, nekaj objektov preriši na učni list.



PRED ZAČETKOM

Preden se lotimo osnovnih pojmov geometrije, ponovimo, kaj so definicija, aksiom in izrek, saj je že Evklid postavil osnovne pojme geometrije, ki temeljijo ravno na definicijah, aksiomih in izrekih.

Ponovi, kaj so definicija, aksiom in izrek. V pomoč so opisi pod gumbi.

Definicija

Aksiom

Izrek

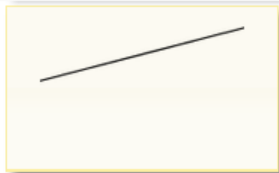
ZGLED

Kateri od spodnjih stavkov so definicije, aksiomi oziroma izreki? Vpiši D za definicijo, A za aksiom in I za izrek.

☐	Krožnica je množica točk v ravnini, ki so enako oddaljene od fiksne točke v ravnini.
☐	Vsako naravno število lahko na en sam način zapišemo kot produkt praštevilskih potenc.
☐	Skozi dve različni točki lahko narišemo eno samo premico.
☐	Praštevila so števila, ki imajo natanko dva delitelja: samega sebe in število 1.
☐	Ravnina je natanko določena s tremi točkami, ki ne ležijo na isti premici.
☐	Vsota kvadratov katet je enaka kvadratu hipotenuze.

TOČKA PREMICA IN RAVNINA

Trije osnovni pojmi v geometriji so točka, premica in ravnina. Te tri pojme je definiral že Evklid v svojih Elementih. **Poveži slike z Evklidovimi opisi.**

		Črta je dolžina brez širine.
		Točka je tisto, kar nima delov.
		Ploskev je tisto, kar ima samo dolžino in širino.

Danes osnovnih pojmov več ne definiramo, za njihovo intuitivno razumevanje pa si seveda lahko pomagamo z Evklidovimi definicijami.

Dopolni

Točke bomo označevali _____.

Črto danes imenujemo **premica**. Premice bomo označevali _____.

Ploskev danes imenujemo **ravnina**. Ravnine bomo označevali _____.

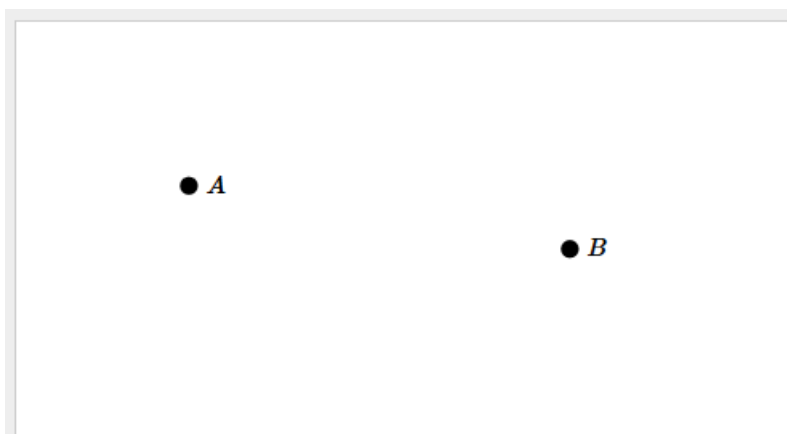
TOČKE IN PREMICE V RAVNINI

Med točkami in premicami v ravnini veljajo relacije, ki jih poznamo že iz osnovne šole, nekatere pa bodo morda tudi nove.

ZGLED

Nariši nekaj premic, nato dopolni spodnje stavke.

Nalogo reši na aktivni sliki v e-učbeniku, nekaj objektov preriši na učni list.



Če točka A leži na premici, zapišemo $A \in p$, če pa ne leži, zapišemo $A \notin p$.

Vstavi: *neskončno mnogo premic* ali *natanko ena premica*.

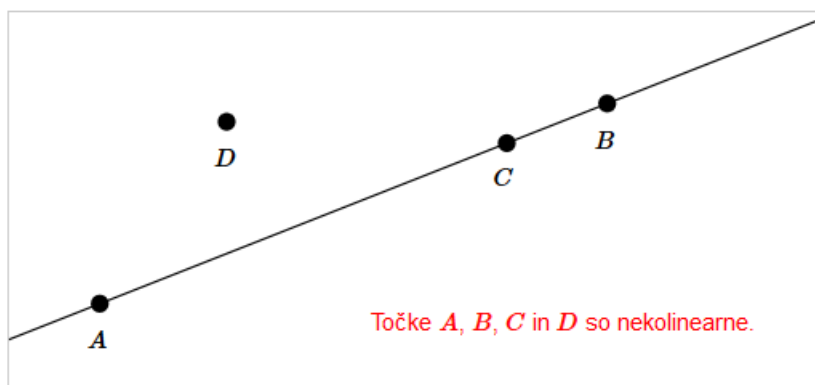
V ravnini lahko narišemo .

Skozi točko A poteka .

Skozi točki A in B poteka .

Skozi dve različni točki poteka natanko ena premica.

S premikanjem točke D razišči, kdaj so točke **kolinearne**.



Točke, ki ležijo na isti premici, imenujemo **kolinearne** točke. Točke, ki ne ležijo na isti premici, so **nekolinearne** točke. Rekli bomo, da so točke v splošni legi, ko je med njimi vsaka trojica točk nekolinearna.

Dve različni premici imata lahko največ eno skupno točko.

Dokaz

Prepiši dokaz.

ZGLED

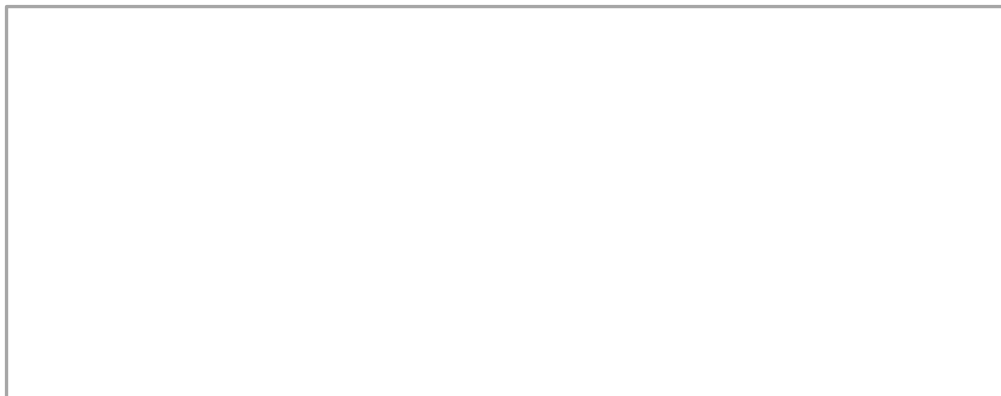
V zvezek nariši pet točk, pri čemer naj bo vsaka trojica točk nekolinearna. Koliko različnih premic lahko narišeš skozi te točke?

Rešitev

MEDSEBOJNA LEGA PREMIC

S premikanjem premic in točk na aktivni sliki razišči, kakšno medsebojno lego lahko imata dve premici v ravnini.

V zvezek nariši sekajoči se premici, vzporedni premici in premici, ki se prekrivata.



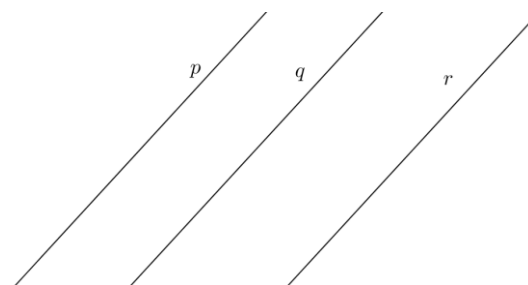
Premici v ravnini, ki

- imata natanko eno skupno točko, se **sekata**. Skupno točko imenujemo **presečišče**.
- nimata nobene skupne točke ali ki se prekrivata, sta **vzporedni**.

Katere lastnosti ima vzporednost premic v ravnini?

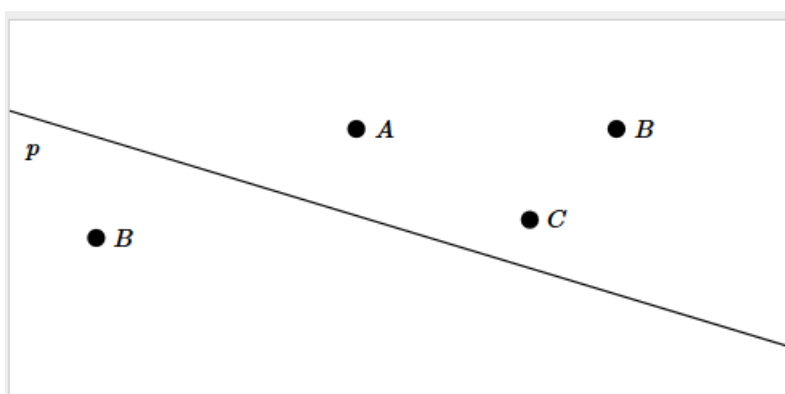
Vzporednost premic je:

- Refleksivna relacija: $p \parallel p$
- Simetrična relacija: $p \parallel q \Rightarrow q \parallel p$
- Transitivna relacija: $(p \parallel q) \wedge (q \parallel r) \Rightarrow p \parallel r$



V nadaljevanju bomo raziskali, koliko različnih vzporednic lahko narišemo k dani premici skozi točko, ki ne leži na dani premici.

Najprej na aktivni sliki razišči, koliko različnih vzporednic k premici p lahko narišemo skozi vsako od točk A , B , C in D . **Nekaj primerov nariši na učni list.**



Dopolni z besedo.

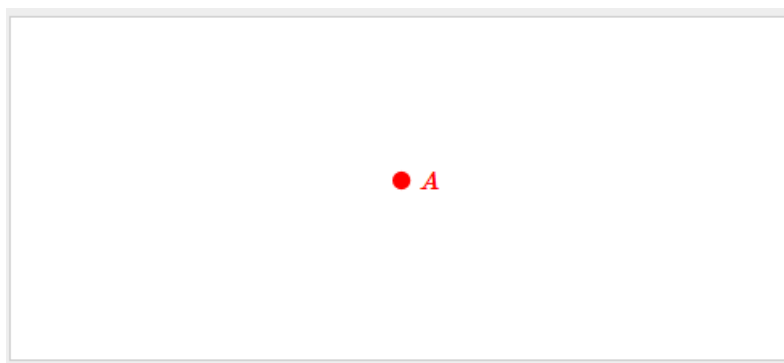
Skozi vsako od točk A, B, C in D lahko narišemo natanko vzporednico k premici p .

AKSIOM O VZPOREDNICI

Naj bosta dani premica p in točka A , ki ne leži na p . Skozi točko A lahko narišemo k premici p natanko eno vzporednico.

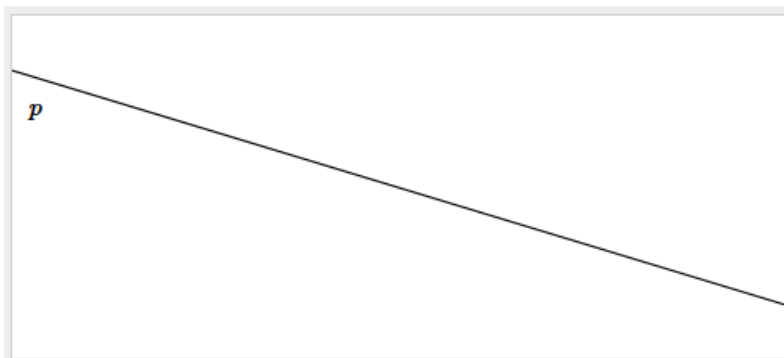
Nariši nekaj premic, ki potekajo skozi točko A .

Nalogo reši na aktivni sliki v e-učbeniku, nekaj premic nariši na učni list.



Nariši nekaj premic, ki so vzporedne s premico p .

Nalogo reši na aktivni sliki v e-učbeniku, nekaj premic nariši na učni list.



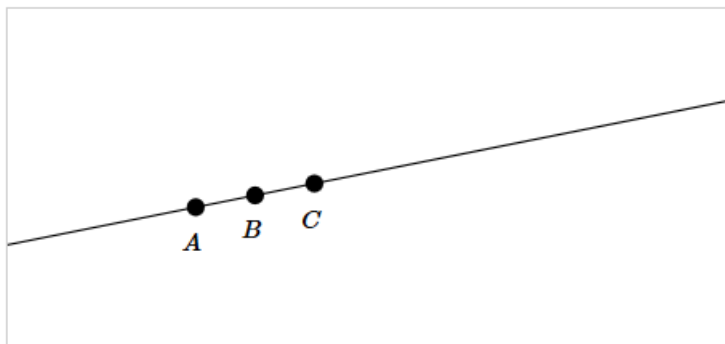
Množico premic skozi isto točko imenujemo **šop premic**.
Množico vzporednic imenujemo **snop premic**.

Modela šopa in snopa premic pogosto opazimo tudi v vsakodnevnem življenju in naravi. **Oglej si nekaj primerov na slikah pod gumbom v e-učbeniku.**

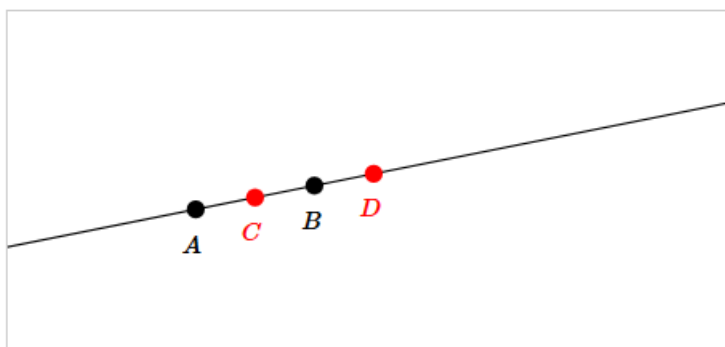
DELI PREMICE

S premikanjem točk na premici razišči naslednja aksioma.

Če so tri različne točke kolinerane, ena vedno leži med drugima dvema.



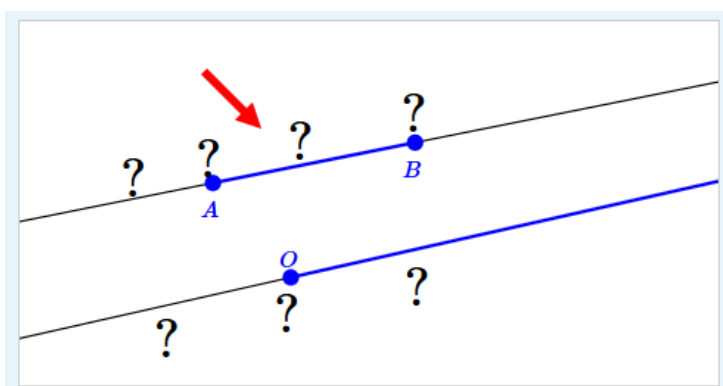
Če sta A in B različni točki premice p , potem na premici p ležita vsaj še dve točki C in D , in sicer tako, da C leži med A in B , D pa je točka, da velja, da C leži med A in D .



Med različnima točkama premice je neskončno mnogo točk.

Dokaz

Spomni se, katere dele premice poznamo. Premikaj puščico na aktivni sliki.



Dopolni spodnje besedilo o delih premice.

- Množica točk premice, ki ležijo med različnima točkama A in B , vključno s točkama A in B , se imenuje AB .
- Točki A in B sta daljice AB .
- Množica točk premice, ki je na eno stran omejena z izhodiščem, na drugo pa neomejena, se imenuje .
- Premica, na kateri leži daljica oziroma poltrak, se imenuje daljice ali poltraka.

RAZDALJA

Na premici p izberimo točki A in B . Med njima lahko izmerimo razdaljo, ki jo označimo z $d(A, B)$.

Katera je standardna enota za merjenje razdalje? **Zapiši odgovor.**

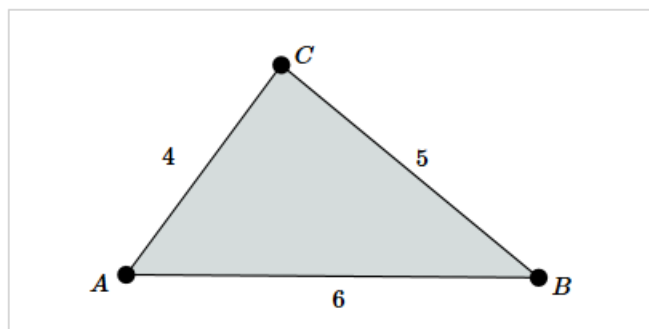
Enota za merjenje razdalje

Dolžina daljice AB je enaka razdalji med točkama A in B . Označimo jo z $|AB| = d(A, B)$. Enako dolge daljice so skladne.

Razdalja ima nekaj zanimivih **lastnosti**.

1. Razdalja med dvema točkama je vedno nenegativno število: $d(A, B) \geq 0$
2. Razdalja med A in B je enaka 0, natanko takrat, ko je $A = B$:
 $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
3. Razdalja od točke A do točke B je enaka razdalji od točke B do točke A :
 $d(A, B) = d(B, A)$
4. Trikotniška neenakost: če so A , B in C poljubne tri točke, velja:
 $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$

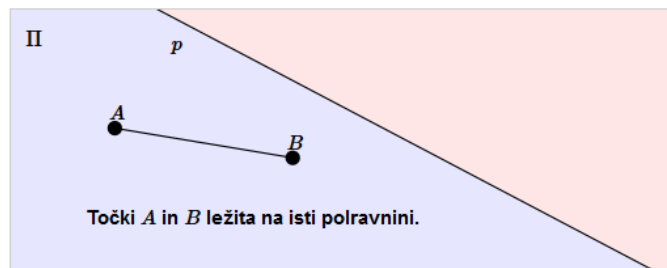
Preuči vsako od lastnosti razdalje na aktivni sliki v e-učbeniku.



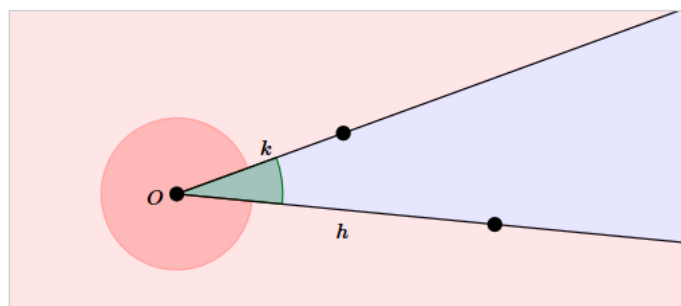
DELI RAVNINE

Premica p razdeli ravnino na **polravnini**. Premica p je **rob** polravnine. Točki A in B **ležita na** isti polravnini, če daljica AB ne seka roba polravnine.

Pojme iz definicije si oglej na aktivni sliki. Premikaj točki A in B ter ugotovi, ali ležita na isti ali na različnih polravninah. Na sliki spodaj nariši še nekaj drugih možnih leg toč A in B .

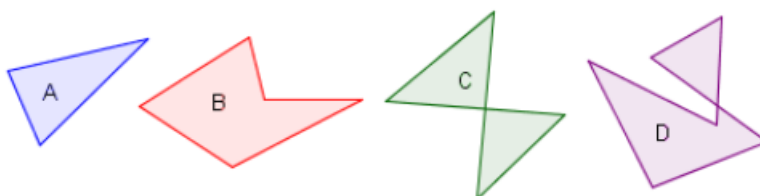


Kot je množica točk v ravnini med poltrakoma s skupnim izhodiščem. Dva poltraka s skupnim izhodiščem določata dva kota. Izhodišče poltrakov je vrh kota, poltraka pa sta kraka kota.



LIKI

Na sliki je nekaj likov. Kateri med njimi so enostavni liki?

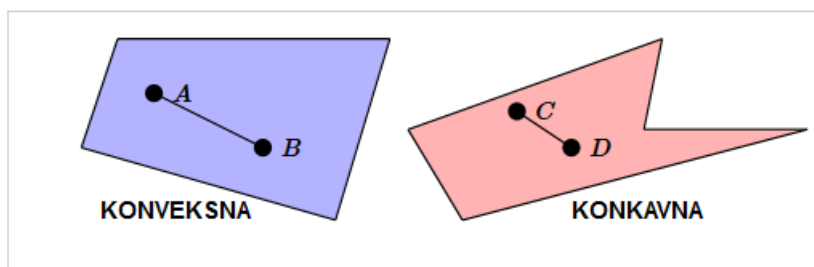


Vpiši E k tistemu liku, ki je enostaven, in N k tistemu, ki ni enostaven.

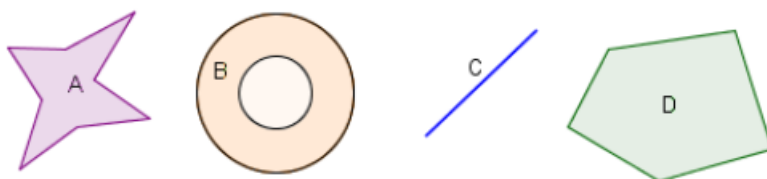
A	☐	B	☐	C	☐	D	☐
---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------

Enostaven lik je množica točk v ravnini, omejena s sklenjeno krivuljo, ki ne seka same sebe.

Med enostavnimi liki bomo ločili konveksne in konkavne like. **Preberi opisa obeh pojmov, nato pa razišči še na aktivni sliki.**



Katere od množic točk so konveksne?



Vpiši *K* pri konveksni množici in *N* pri nekonveksni (konkavni) množici.

A	☐	☐	☐	☐	B	☐	☐	☐	☐	C	☐	☐	☐	☐	D	☐	☐	☐	☐
---	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	---	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	---	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	---	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

Ponovi še osnovne pojme večkotnik, trikotnik, krožnica in krog.

Večkotnik

Trikotnik

Krog in krožnica

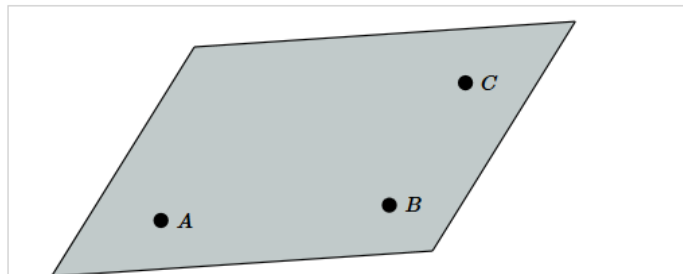


NALOGE: Reši naloge v e-učbeniku na strani 10 in 11.

RAVNINE V PROSTORU

Gradivo za obravnavano se nahaja v e-učbeniku VEGA1, stran 205-209.

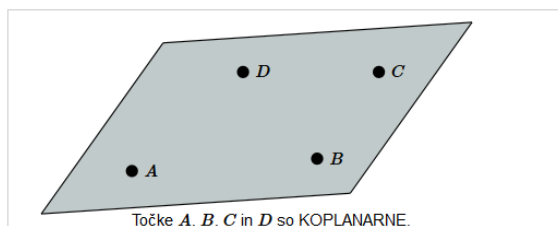
S premikanjem točk na aktivni sliki v e-učbeniku preuči naslednji aksiom.



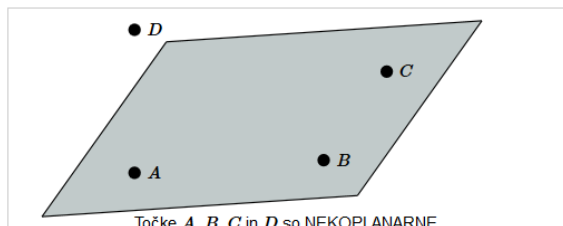
Tri nekolinearne točke določajo natanko eno ravnino.

S premikanjem točke D razišči, kdaj so točke **koplanarne**.

Od kod izvira beseda koplanarnost? Zapiši.



Točke A, B, C in D so KOPLANARNE.



Točke A, B, C in D so NEKOPLANARNE.

Točke, ki ležijo v isti ravnini, imenujemo **koplanarne točke**.

Točke, ki ne ležijo v isti ravnini, imenujemo **nekoplanarne točke**.

Premica, ki ima z ravnino skupni dve različni točki, leži v tej ravnini.

Slika

Poglej sliko pod gumbom in zapiši utemeljitev.

Ravnina je natanko določena tudi:

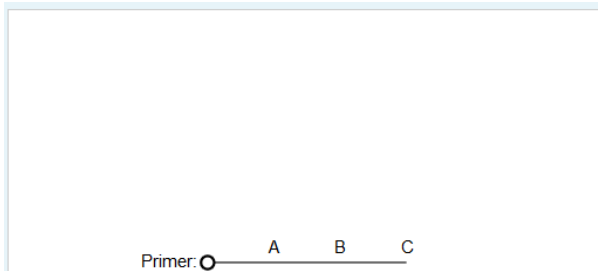
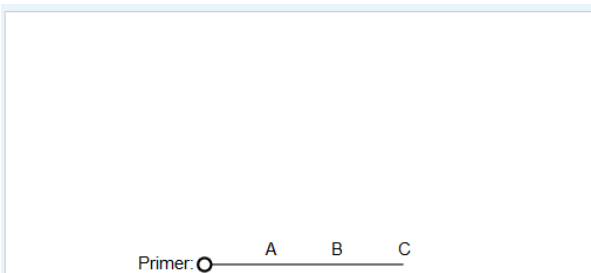
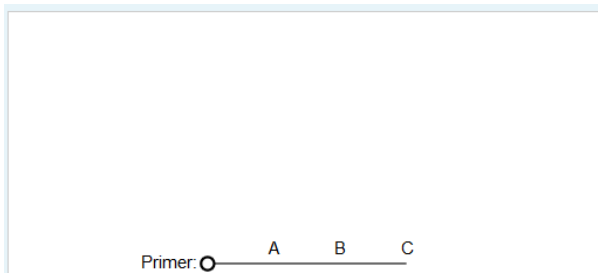
- A) s premico in točko, ki ne leži na tej premici,
- B) z dvema sekajočima se premicama,
- C) z dvema različnima vzporednicama.

Dokaz A

Dokaz B

Dokaz C

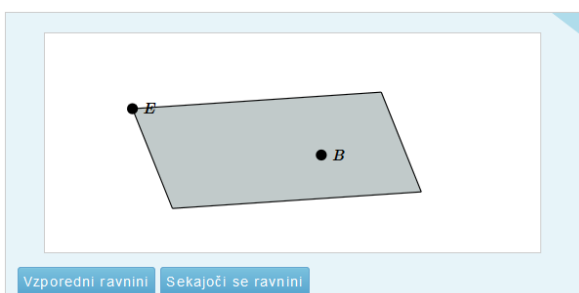
Prepiši dokaze za trditve A, B in C. Trditve A, B in C ponazori na slikah spodaj.



MEDSEBOJNA LEGA RAVNIN IN PREMIC

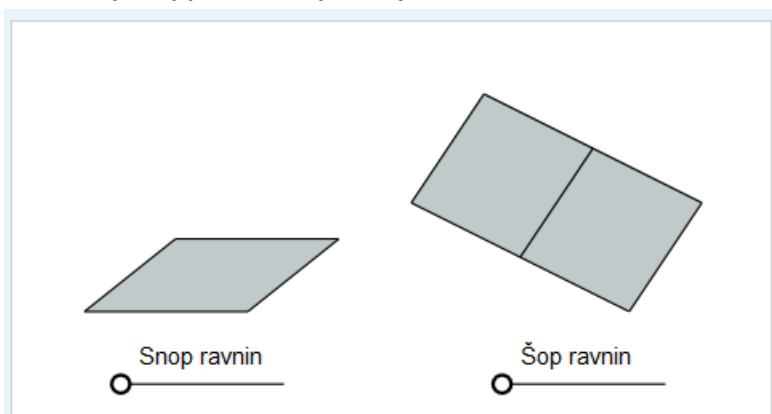
Ravnini sta **vzporedni**, če nimata nobene skupne točke ali pa se prekrivata. Ravnini, ki **nista vzporedni**, se sekata v premici.

Na slikah spodaj prikaži vzporedni in sekajoči ravnini.

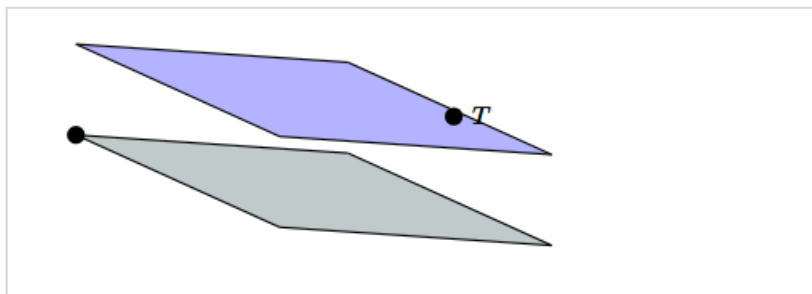


Množico vzporednih ravnin imenujemo **snop ravnin**, množico ravnin, ki se sekajo v isti premici, pa imenujemo **šop ravnin**.

Na sliki spodaj prikaži snop in šop ravnin.



Ponovi aksiom o vzporednosti v ravnini in razmisli, kako bi se aksiom glasil v prostoru. Pomagaj si z aktivno sliko v e-učbeniku.



Aksiom o vzporednosti v prostoru: skozi točko, ki ne leži na dani ravnini, lahko dani ravnini narišemo natanko eno vzporedno ravnino.

Kakšno medsebojno lego imata lahko premica in ravnina?

Razišči s premikanjem točk na aktivni sliki in lege upodobi na slikah spodaj.

Skupne točke: ☐ Dve ☐ Ena ☐ Brez

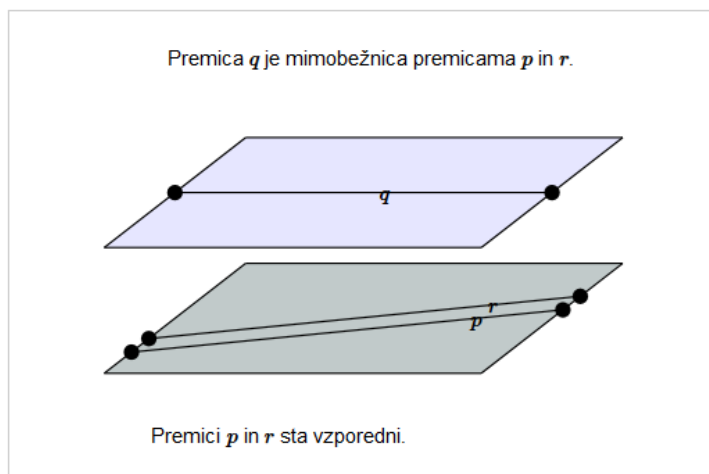
Skupne točke: ☐ Dve ☐ Ena ☐ Brez

Skupne točke: ☐ Dve ☐ Ena ☐ Brez

Premica in ravnina sta **vzporedni**, če nimata skupnih točk ali če premica leži v ravnini.

MEDSEBOJNA LEGA PREMIC

S premikanjem točk na aktivni sliki razišči medsebojno lego dveh premic v prostoru.

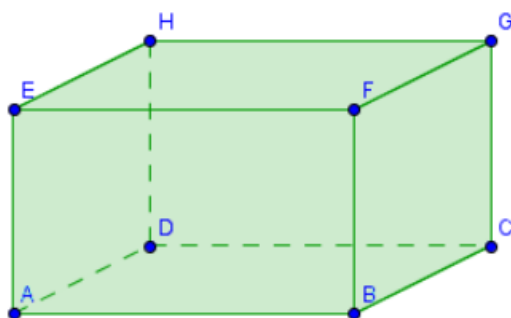


Premici v prostoru,

- ki imata natanko eno skupno točko, se **sekata**. Skupno točko imenujemo **presečišče**.
- ki ležita na isti ravnini in nimata nobene skupne točke ali pa se prekrivata, sta **vzporedni**.
- ki ne ležita na isti ravnini in nimata skupnih točk, sta **mimobežni**.

ZGLED

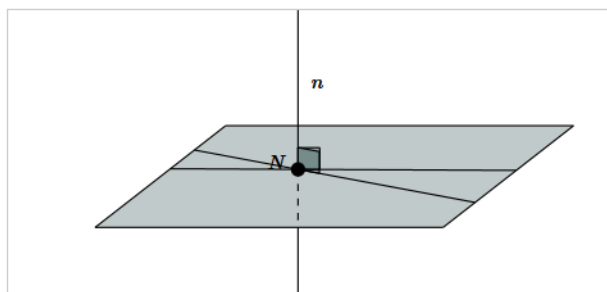
Na sliki je kvader $ABCDEFGH$. Za spodnje trditve zapiši, ali so pravilne (p) ali nepravilne (n).



☐	Točke A , B in G so koplanarne.
☐	Daljica EH je vzporedna z ravnino ADC .
☐	Točke E , F in C so kolinearne.
☐	Ravnina skozi točke A , D in H je vzporedna z ravnino skozi točke F , G in C .
☐	Premica skozi H in F je vzporedna s premico skozi A in C .
☐	Premica skozi H in F je mimobežna s premico skozi A in C .
☐	Premica skozi točki A in C prebada ravnino, ki je določena s točkami H , E in F .
☐	Točke D , B , C in H so koplanarne.
☐	Premica skozi točki A in G seka premico skozi točki B in H .

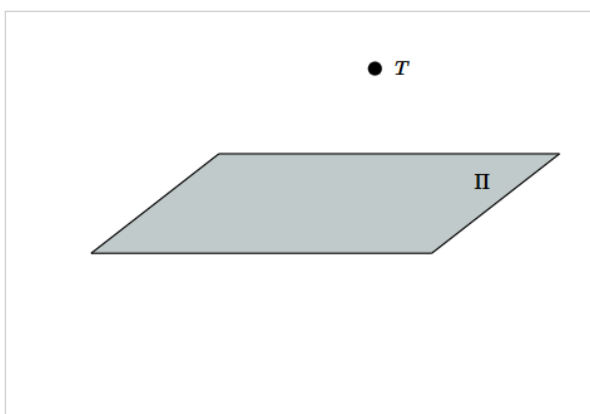
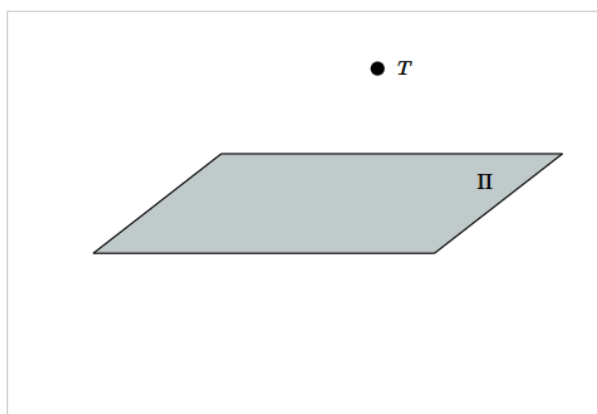
PRAVOKOTNA PROJEKCIJA NA RAVNINO

Normala ravnine n je pravokotnica na ravnino. Presečišče normale in ravnine imenujemo **nožišče normale** N .

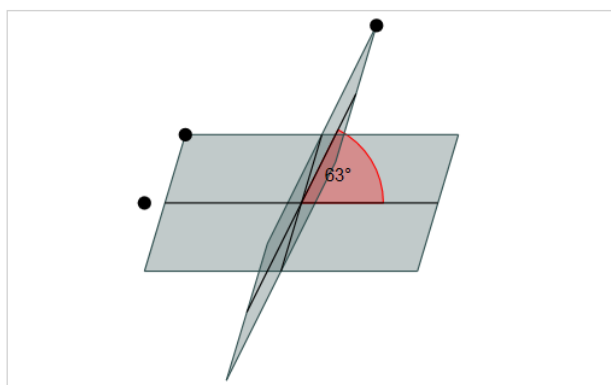


Skozi poljubno točko prostora lahko na dano ravnino narišemo natanko eno normalo.

Na prvi sliki spodaj prikaži projekcijo točke T na ravnino, na drugi pa projekcijo premice skozi točko T , ki prebada ravnino Π , na ravnino.



S premikanjem točk razišči še kot med ravninama.



Kot med ravninama je enak kotu med premicama iz vsake ravnine, ki sta pravokotni na skupno premico obeh ravnin. Ravnini sta **pravokotni**, če je kot med njima pravi.