

Primer testa iz MMNDV
2.1.2022

Naloga 1. O fakultativni simbiozi med dvema populacijama x in y govorimo, ko sicer lahko obe populaciji samostojno preživita, vendar imata od simbioze obe populaciji medsebojno korist. Fakultativno simbiozo predstavlja na primer spodnji model

$$\dot{x} = x - 2x^2 + xy, \quad \dot{y} = y - 2y^2 + xy,$$

Zapiši stacionarne točke tega modela ter linearizacijo modela v vsaki od stacionarnih točk. Stacionarne točke nato klasificiraj glede na njihovo stabilnost.

Rešitev. Imamo sistem

$$\dot{x} = x - 2x^2 + xy$$

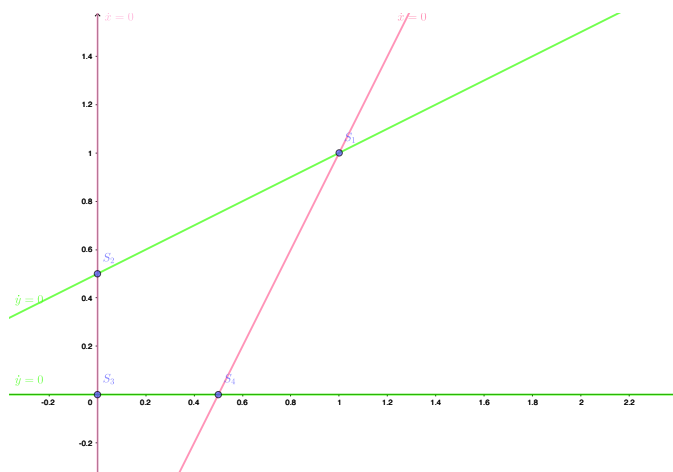
$$\dot{y} = y - 2y^2 + xy.$$

Odvod $\dot{x} = 0$ vzdolž premic

$$x = 0 \text{ in } 2x - y = 1,$$

$\dot{y} = 0$ pa vzdolž premic

$$y = 0 \text{ in } -x + 2y = 1.$$



Imamo štiri stacionarne rešitve:

$$(1, 1), (0, 1/2), (0, 0) \text{ in } (1/2, 0).$$

Linearizacija sistema v neki stacionarni točki $S = (x_0, y_0)$ je linearni sistem

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = DF(S) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

kjer sta $u = x - x_0$ in $v = y - y_0$ in je $F(x, y) = (x - 2x^2 + xy, y - 2y^2 + xy)$. Poglejmo si linearizacijo v točki $S_1 = (1, 1)$. Dobimo

$$DF(1, 1) = \begin{bmatrix} 1 - 4x + y & x \\ y & 1 - 4y + x \end{bmatrix} (1, 1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Linearizacija v stacionarni točki $S_1 = (1, 1)$ je torej sistem

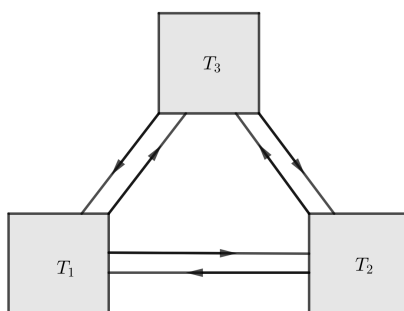
$$\dot{u} = -2u + v$$

$$\dot{v} = u - 2v.$$

Ker sta lastni vrednosti matrike $DF(1,1)$ obe negativni, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$, je točka S_1 asimptotsko stabilna.

Na povsem analogen način lahko zapišemo linearizacije v ostalih treh stacionarnih točkah. V S_2 in S_4 dobimo obakrat lastni vrednosti $\lambda_1 = 3/2$ in $\lambda_2 = -1$. Obe sta torej nestabilni. V točki S_3 pa ima DF dvojno lastno vrednost $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ in je zato točka prav tako nestabilna.

Naloga 2. Oglejmo si dvosmerno krožno postavitvev treh posod



kjer koncentracijo topljenca v posodah modeliramo s sistemom

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_1 + x_2 - 2x_3.$$

Poišči rešitev sistema, ki zadošča začetnemu pogoju $x_1(0) = 1, x_2(0) = x_3(0) = 0$.

Rešitev. Matrika sistema je

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

in izračunamo determinanto

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-2 - \lambda)^3 + 1 + 1 - 3(-2 - \lambda) \\ &= -\lambda(\lambda + 3)^2. \end{aligned}$$

Lastne vrednosti matrike A so torej $\lambda_1 = 0$ in $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$. Pri $\lambda_1 = 0$ je lastni vektor $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)^T$, za $\lambda_{2,3} = -3$ pa dobimo sistem

$$(A - 3I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kar nam da $v_1 + v_2 + v_3 = 0$. Za lastna vektorja lahko izberemo za $v_2 = (1, -1, 0)^T$ in $v_3 = (1, 0, -1)^T$. Splošna rešitev sistem je tako

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + be^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + ce^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + (b+c)e^{-3t} \\ a - be^{-3t} \\ a - ce^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Poglejmo si primer pri začetnem pogoju $\vec{x}(0) = (1, 0, 0)^T$. V tem primeru moramo rešiti sistem

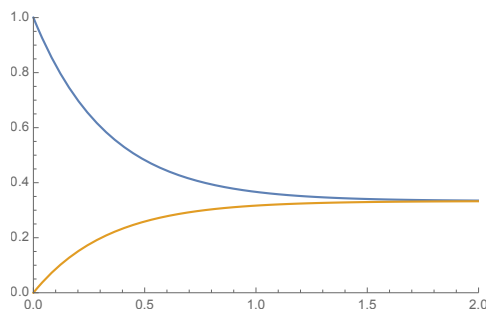
$$\begin{aligned} 1 &= a + b + c \\ 0 &= a - b \\ 0 &= a - c. \end{aligned}$$

Torej je

$$a = b = c = \frac{1}{3}$$

in dobimo rešitev sistema

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{3}(1 + 2e^{-3t}) \\ x_2(t) &= \frac{1}{3}(1 - e^{-3t}) \\ x_3(t) &= \frac{1}{3}(1 - e^{-3t}). \end{aligned}$$



SLIKA 1. Spreminjanje količine soli pri dvosmerni krožni postavitvi treh posod.

Na sliki je z modro barvo označen graf spreminjanja količine soli v prvi posodi, z oranžno pa graf spreminjanja količine snovi v drugi in tretji posodi.

Naloga 3. Čim bolj natančno napiši, kaj pove izrek Arrowa. Katerim aksiomom iz izreka Arrowa zadošča (in katerim ne) naslednja preprosta funkcija socialne blaginje: Pet članov družine izbira kraj dopustovanja izmed treh ponujenih možnosti, tako da vsak izmed njih poda svojo preferenčno relacijo. Končna preferenca družine se določi le glede na število prvih mest.

Rešitev.

Definicija. Naj bo X neprazna množica izbir. Rangiranje izbir iz množice X je vsaka binarna relacija R na množici X , za katero velja

- za vsak par $\forall x, y \in X : xRy \vee yRx$,
- relacija je tranzitivna: $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \implies xRz$.

Naj bo X neprazna množica izbir. Z $L(X)$ označimo množico vseh rangiranj izbir na množici X , torej množica vseh binarnih relacij na X , ki zadoščajo zgornjima dvema pogojema.

Definicija. Naj bo N naravno število. Funkcija socialne blaginje je vsaka preslikava

$$f : L(X)^N \rightarrow L(X).$$

Če je R rangiranje izbir iz neprazne množice X bomo z \tilde{R} označili asimetrični del relacije R . To pomeni

$$x\tilde{R}y \iff xRy \wedge \neg yRx.$$

Definicija (Paretovo načelo). Funkcija socialne blaginje $f : L(X)^N \rightarrow L(X)$ zadošča Paretovem načelu, če za vsak par $x, y \in X$ in za vsako N -terico izbir $(R_1, R_2, \dots, R_N) \in L(X)^N$, za katero velja $x\tilde{R}_i y$ za vsak $i = 1, 2, \dots, N$, sledi $x\tilde{R}y$, kjer je $R = f(R_1, R_2, \dots, R_N)$.

Naj bo X neprazna množic izbir, $\emptyset \neq Y \subset X$ in R rangiranje izbir iz množice X . Z $R|_Y$ označimo zožitev relacije R na množico S . Bolj natančno, $R|_Y$ je rangiranje izbir iz Y , definirano z $\forall x, y \in Y : xR|_Y y \iff xRy$.

Definicija (Neodvisnost od irelevantnih alternativ). Funkcija socialne blaginje $f : L(X)^N \rightarrow L(X)$ je neodvisna od irelevantnih alternativ, če za vsak par $x, y \in X$ in za vsaki dve N -terici izbir $(R_1, R_2, \dots, R_N) \in L(X)^N$ in $(R_1^*, R_2^*, \dots, R_N^*) \in L(X)^N$, za kateri velja $R_i|_{\{x,y\}} = R_i^*|_{\{x,y\}}$ za vsak $i = 1, 2, \dots, N$, sledi $R|_{\{x,y\}} = R^*|_{\{x,y\}}$, kjer je $R = f(R_1, R_2, \dots, R_N)$ in $R^* = f(R_1^*, R_2^*, \dots, R_N^*)$.

Definicija (Obstoj diktatorja). Za funkcijo socialne blaginje $f : L(X)^N \rightarrow L(X)$ obstaja diktator, če obstaja tak indeks i , da za vsak par $x, y \in X$ in za vsako N -terico izbir $(R_1, R_2, \dots, R_N) \in L(X)^N$ velja $x\tilde{R}_i y \implies x\tilde{R}y$, kjer je $R = f(R_1, R_2, \dots, R_N)$.

Izrek (Izrek Arrowa). *Naj bo $N \geq 2$ in moč množice X vsaj 3. Potem ne obstaja funkcija socialne blaginje $f : L(X)^N \rightarrow L(X)$ za katero bi veljalo Paretovo načelo, neodvisnost od irelevantnih alternativ in bi ne imela diktatorja.*

Predstavljen metoda je nediktatorska in zadošča Paretojemu načelu. Torej ne zadošča aksiomu o neodvisnosti od irelevantnih alternativ.

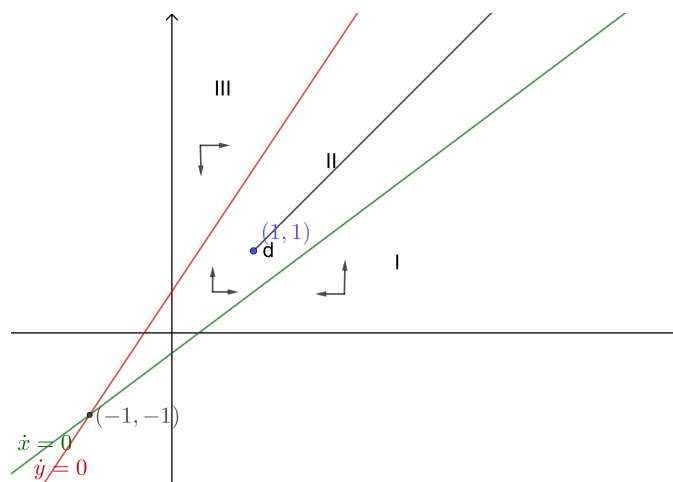
Rešitev 1. izpita iz MMNDV z rešitvami
24.1.2019

Naloga 1. Razišči obnašanje Richardsovega modela oborožitvene tekme

$$\frac{dx}{dt} = 4y - 3x + 1,$$
$$\frac{dy}{dt} = 3x - 2y + 1.$$

V primeru začetnega pogoja $x(0) = y(0) = 1$ poišči eksplicitno rešitev.

Rešitev. Če se začetni pogoj nahaja v območju II, potem rešitev ostane v območju II ves čas, obe koordinati se povečujeta. Če se začetni pogoj nahaja v območju I ali III, potem rešitev slej ko prej pride v območje II. V vsakem primeru obe državi dajeta vedno več za oborožitev.



Da poiščemo eksplicitno rešiti pri danem začetnem pogoju, moramo rešiti linearen sistem

$$\frac{dx}{dt} = 4y - 3x + 1,$$
$$\frac{dy}{dt} = 3x - 2y + 1.$$

Matrika sistema je

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Lastne vrednosti matrike sta

$$\lambda_1 = -6 \text{ in } \lambda_2 = 1$$

s pripadajočima lastnima vektorjema

$$v_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ in } v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Partikularna rešitev enačbe je kar presečišče $(x, y) = (-1, -1)$. Splošna rešitev je torej

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Ae^{-6t} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} + Be^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Začetni pogoj je $(1, 1)$, zato mora za A in B veljati enačba

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

kar pomeni

$$A = 0 \text{ in } B = 2.$$

Končna rešitev je torej

$$x(t) = 2e^t - 1,$$

$$y(t) = 2e^t - 1.$$

Naloga 2. O obligativni simbiozi med dvema populacijama x in y govorimo, ko nobena od populacij ne more samostojno preživeti, imata pa od sobivanja obe populaciji medsebojno korist. Izmed spodnjih modelov izberi tistega, ki lahko opisuje obligativno simbiozo:

$$(a) \quad \dot{x} = x - xy, \quad \dot{y} = y - xy,$$

$$(b) \quad \dot{x} = -x + xy, \quad \dot{y} = -y + xy,$$

$$(c) \quad \dot{x} = x + xy, \quad \dot{y} = -y + xy,$$

Razišči dolgoročno obnašanje populacij x in y za izbrani model pri začetnem pogoju $x(0) = y(0) = 1/2$ in $x(0) = y(0) = 2$.

Rešitev. Pravilen sistem za fakultativno simbiozo je (b). Vsaka od populacij x in y bi se brez prisotnosti druge eksponentno upadala $\dot{x} = -x$ in $\dot{y} = -y$, ob prisotnosti druge pa ima vsaka pozitiven prirastek xy , kar pomeni, da prisotnost druge prinese korist. Če je začetni pogoj $x(0) = y(0) = 1/2$, potem obe populaciji padata proti točki $(0, 0)$. Če je začetni pogoj $x(0) = y(0) = 2$, potem obe populaciji naraščata v neskončno.

Naloga 3. 100 poslancev v parlamentu svoje glasove razvrsti v naslednjem vrstnem redu: A B C (32 poslancev), B C A (33 poslancev), C B A (35 poslancev). Ali obstaja Condorcetov zmagovalec?

Rešitev. Condorcetov zmagovalec je B, saj bo razgleden za zmagovalca ne glede na vrstni red večinskih glasovanj. Če najprej opravijo večinsko glasovanje med A in B, zmaga B, nato pa v naslednjem krogu med B in C zmaga B. Če najprej opravijo večinsko glasovanje med A in C najprej zmaga C, nato pa med C in B zmaga B. Če najprej opravijo večinsko glasovanje med B in C najprej zmaga B, nato pa med A in B zmaga B.