

OMA - Vaje - Matematična indukcija

1. Z indukcijo dokaži, da za vsak  $n \in \mathbb{N}$  veljajo naslednje enakosti:

$$(a) -1^2 + 2^2 - 3^2 + \dots + (-1)^n n^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2},$$

$$(b) 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = (2n - 2)2^n + 2,$$

$$(c) 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1,$$

$$(d) 1(1^2 - 1) + 2(2^2 - 1) + \dots + n(n^2 - 1) = \frac{(n^2-1)n(n+2)}{4}.$$

2. Za vsako naravno število  $n$  in vse  $x \in (0, 2\pi)$  velja

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdots \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}.$$

(Nasvet: Prav ob koncu dokaza si pomagajte z adicijskim izrekom za dvojne kote.)

3. Za vse  $n \in \mathbb{N}$  velja

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \dots + n \cdot 3^n > \frac{(2n - 1)3^{n+1}}{4}.$$

4. Z indukcijo dokaži, da za vse  $n \in \mathbb{N}$  in  $x > -1$  velja neenakost

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad (\text{Bernoullijeva neenakost}).$$

5. Z indukcijo dokaži, da je za vsako naravno število  $n$  število

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{\dots + \sqrt{12 + \sqrt{12}}}}}}}}} \quad (n \text{ korenov})$$

manjše od 4.

6. Z indukcijo dokaži naslednje trditve o deljivosti izrazov:

(a) Izraz  $2^{2n+1} + 3n - 2$  je deljiv z 9 za vsak  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

(b) Izraz  $5^n + 2 \cdot 11^n$  deljiv s 3 za vsako naravno število  $n$ .

(c) Izraz  $3 \cdot 5^n + 2 \cdot 7^n - 5$  je deljiv s 24 za vsako naravno število  $n$ .

(d) Število  $2^{2^n} - 1$  je deljivo s 15 za  $n \geq 2$ . (Nasvet: Upoštevaj, da je  $2^{2^{n+1}} = (2^n)^2$ .)

7. Z indukcijo dokaži, da je zadnja številka števila  $2^{2^n}$  za  $n \geq 2$  enaka 6.

8. Z indukcijo dokaži, da je izraz  $\frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} + \frac{n}{6}$  naravno število za vse  $n \in \mathbb{N}$ .

9. Z indukcijo dokaži, da je vsota notranjih kotov konveksnega  $n$ -kotnika ( $n \geq 3$ ) enaka  $(n - 2)\pi$ .
10. Na nekem otoku se plačuje le s kovanci po 12 in 5 centov. Z indukcijo pokaži, da lahko plačamo vse zneske nad 48 centov.
11. Z indukcijo dokaži, da  $n$  paroma nevzporednih premic, od katerih se nobene tri ne sekajo v isti točki, razdeli ravnino na  $\frac{n(n+1)}{2} + 1$  delov.