

Vaje OMA - Realna števila

1. Ali se vsak ulomek zapiše kot periodično decimalno število? Ali je decimalno število enolično določeno?
2. Število $11,2\overline{65}$ zapiši kot ulomek. Razloži, zakaj lahko vsako periodično decimalno število zapišemo kot ulomek? Ali je tak ulomek morda enolično določen?
3. Dokaži, da se v decimalnem zapisu iracionalnega števila vsaj ena števka pojavi neskončnokrat.
4. Dokaži, da med poljubnima realnima (oziroma racionalnima) številoma obstajata neko racionalno in neko iracionalno število.
5. Ugotovi, ali so naslednja števila iracionalna:

(a) $\sqrt{8}$,

(b) $\sqrt{\sqrt{5}-2} + \sqrt{\sqrt{5}+2}$

(c) $2\sqrt{3} + \sqrt{\frac{1}{2}}$,

(d) $\log_5(7)$,

(e) $\log_{\sqrt{3}}(2)$

6. Ali je katero od števil iracionalno za vsako (kakšno) naravno število n :

(a) $\sqrt[3]{n} - \sqrt{n}$,

(b) $\frac{\sqrt{n+9}}{\sqrt{n+3}}$

(c) $\log_{\sqrt{3}}(n)$.

(Če ne gre v splošnem, premisli vsaj za $n = 3$.)

7. Naj bo $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ in $y, z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(a) Dokaži, da velja $x + y, x \cdot y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(b) Kaj lahko poveš o številih $y + z, y \cdot z, z^2$ in \sqrt{z} ? Ali so vsa dobro definirana?

8. Analitično in grafično reši naslednje neenačbe oziroma enačbe:

(a) $|3x + 2| > 2$,

(b) $|x + 1| \leq |2x| - 1$,

(c) $|1 - |x - 1|| = 2$,

(d) $|\frac{2x+1}{x-2}| \leq 1$,

9. Naslednjim množicam najprej poišči nekaj zgornjih in spodnjih mej, nato pa jim poišči še supremum in infimum oziroma maksimum in minimum, če obstajajo.

(a) $\mathcal{A} = [0, 1) \cup \{-4, -3, -1\}$,

(b) $\mathcal{A} = \mathbb{R}^+ \cup (-3, 5]$,

(c) $\mathcal{A} = \{0.1, 0.11, 0.111, 0.1111, \dots\}$,

(d) $\mathcal{A} = \{(-\frac{1}{2})^m \mid m \in \mathbb{N}\}$,

(e) $\mathcal{A} = \{1 + \frac{1}{x} \mid x \in (1, \infty)\}$.

(f) $\mathcal{A} = \{(-1)^m + \frac{1}{m} \mid m \in \mathbb{N}\}$.

10. Ali ima množica

$$\mathcal{A} = \{0.1, 0.101, 0.101001, 0.1010010001, 0.101001000100001, \dots\}$$

zgornjo mejo? (Je racionalno število?)

11. Dana je množica $\mathcal{A} = \{\frac{2m}{1+2m} \mid m \in \mathbb{N}\}$.

(a) Utemelji najprej, zakaj je 0 spodnja meja množice A . Nato razloži, zakaj je $\frac{2}{3}$ minimum oziroma natančna spodnja meja množice A .

(b) Pokaži, da števili 0.9 in 0.99 nista zgornji meji množice \mathcal{A} .

(c) Utemelji najprej, zakaj je 1 zgornja meja množice \mathcal{A} , nato pa pokaži, da je 1 tudi natančna zgornja meja množice \mathcal{A} .

12. Naj bo A omejena podmnožica realnih števil, ter naj bo

$$-A := \{-a \mid a \in A\}.$$

Naslednje trditve najprej ilustriraj na preprostem primeru, ko je množica $A = [1, 3) \cup \{4\}$, nato pa napravi še splošni dokaz:

(a) $-\sup A$ je spodnja meja za $-A$, $-\inf A$ pa zgornja meja za $-A$.

(b) $\inf(-A) = -\sup A$.

(c) $\sup(-A) = -\inf A$.