Vaje OMA - Kompleksna števila

1. Dano je kompleksno število $z = 3+4i$. Izračunaj oziroma določi realne in imaginarne dele naslednjih števil:

$$(2-3i)(z-1-3i)+i^3, \qquad \frac{\bar{z}-2+2i}{2+i}, \qquad \mathrm{Im}(\frac{1-i}{|z|+1}).$$

2. V kompleksni ravnini predstavi naslednje množice:

   (a) $\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2, \quad \frac{\pi}{4} < \arg(z) \leq \frac{3\pi}{2}\}$,

   (b) $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| < 2, \quad \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$,

   (c) $\mathcal{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| = |z+1|\}$,

   (d) $\mathcal{G} = \{z \in \mathbb{C} \mid (2+3i)z + (2-3i)\bar{z} = 2\}$,

3. Dokaži, da velja

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} = \frac{i}{2}\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+2i| = 2\}.$$

   Kaj geometrijsko predstavlja zgornja množica? Nariši jo.

4. Dokaži ali ovrzi naslednje enakosti:

   (a) $i\,\mathrm{Im}(\bar{w}\,z) + z\,\mathrm{Im}(-iw) + w\,\mathrm{Im}(i\,\bar{z}) = 0, \quad z, w \in \mathbb{C}$,

   (b) $i\mathrm{Re}(\bar{w}z) + z\mathrm{Re}(-iw) + w\mathrm{Re}(i\bar{z}) = 0, \quad z, w \in \mathbb{C}$,

5. Izračunaj vse kvadratne korene

$$\sqrt[2]{3-4i}, \qquad \sqrt[2]{-6-8i}.$$

   (Nasvet: Zapiši $a + ib = \sqrt[2]{3-4i}$, kvadriraj in reši dobljeni sistem enačb.)

6. Dano je oglišče $z_1 = \sqrt{3} + i$ pravilnega sedemkotnika s središčem v 0. Poišči še ostala oglišča tega sedemkotnika, ki jih je dovolj podati v polarni obliki.
   (Nasvet: Opazi, da z vrtenjem oglišča okrog središča za ustrezne kote dobimo ostala oglišča, polarni zapis dveh sosednjih oglišč se torej razlikuje le za kot $\frac{2\pi}{7}$.)

7. Z uporabo polarnega zapisa poenostavi naslednje izraze, t.j. vsa števila podaj v obliki z realnim in imaginarnim delom:

(a) $(1-i)^{100}$,

(b) $(\frac{1-i}{1+i})^{2020}$,

(c) $(1-i\sqrt{3})^{2020}$,

(d) $(2\sqrt{3}+2i)^{2020}$.

8. Z uporabo Moivreove formule

$$(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))^7=(\cos(7\alpha)+i\sin(7\alpha))$$

izrazi $\sin(7\alpha)$ in $\cos(7\alpha)$ le s $\sin(\alpha)$ ter $\cos(\alpha)$.

9. Dana kompleksna števila z zapiši v polarni obliki in v polarni obliki nato zapiši vse njihove kubične in vse pete korene (t.j. reši enačbi $w^3=z$ oziroma $w^5=z$), ter jih označi v kompleksni ravnini:

(a) $-i$,

(b) $-2-2i$,

(c) $\sqrt{3}-i$,

(d) $-1+i\sqrt{3}$.

Poskusi še izračunati kubične korene katerega od števil (t.j.podati z realnim in imaginarnim delom).

10. Mihec je računal dvajsete korene nekega kompleksnega števila z in eden od dobljenih korenov je bil $\sqrt{3}-i$. Zapiši še vsaj tri izmed preostalih korenov števila z. (Korene je dovolj podati v polarni obliki.) Določi tudi z. (Zapiši realni in imaginarni del.)

11. Poišči vsa kompleksna števila $z\in\mathbb{C}$, ki rešijo enačbe

(a) $z^4+z^2-2=0$,

(b) $z^2+(1-i)z-i=0$,

(c) $z^2+\mathrm{Im}(z)=2\bar{z}+3$,

(d) $|z|+\bar{z}=2+i$.

(e) $\mathrm{Im}(\frac{1+z}{1-z})=\mathrm{Re}(\frac{3+i}{2-i})$.

(f) $\bar{z}=z^3$. (Nasvet: Pomagaj si s polarno obliko kompleksnega števila.)