Vaje OMA - Zaporedja

1. Kvadratu s stranico 2 včrtamo manjši kvadrat tako, da njegova oglišča ležijo na razpoloviščih stranic večjega kvadrata, manjšemu kvadratu nato spet včrtamo kvadrat, itd. Dolžine stranic, ploščin in obsege kvadratov zapiši v zaporedja in določi splošne člene. Ali je katero od zaporedij geometrijsko?

   (Nasvet: Razmisli, za kolikokrat se na vsakem koraku poveča obseg oziroma zmanjša ploščina.)

2. Par zajčkov v enem mesecu odraste. Po dveh mesecih in nato vsak naslednji mesec ima par odraslih zajcev po dva potomca različnega spola. Pari potomcev spet po enem mesecu odrastejo in imajo vsak naslednji mesec prav tako dva potomca različnega spola itd. Z zaporedji O_m, M_n oziroma F_n predstavi številčnost odraslih, mladih oziroma vseh zajcev v n-ti generaciji, ter poišči rekurzivne zveze zaporedij.

3. Dana so zaporedja:

   (a) $a_n = (-1)^n \frac{n+2}{n}$,

   (b) $\sqrt{\frac{2}{1}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{4}{3}}, \sqrt{\frac{5}{4}}, \cdots$

   - Izračunaj nekaj začetnih členov zaporedja oziroma določi splošni člen. Ali je kak člen zaporedja enak $\frac{6}{5}$ oziroma $\frac{1}{2}$?
   - Ali je katero zaporedje monotono (padajoče oziroma naraščajoče)? (Nasvet: Opazuj predznak razlike $a_{n+1} - a_n$ oziroma kvocient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ primerjaj z 1.)
   - Ali je katero zaporedje navzgor oziroma navzdol omejeno? Če je odgovor pritrdilen, poskusi določiti tudi infimum in supremum zaporedja.

4. Dano je zaporedje $a_n = 1 + \frac{1}{3n+1}$.

   (a) Ugotovi, od kod naprej se členi zaporedja od 1 razlikujejo za manj kot $\frac{1}{100}$.

   (b) Po definiciji limite zaporedja pokaži $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, t.j. za poljuben $\varepsilon > 0$ poišči N (odvisen od ε), da bo $|a_n - 1| < \varepsilon$ za $n > N$.

5. Poišči vsa stekališča zaporedij $a_n = \cos(\frac{n\pi}{2})$ in $b_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$.

6. Poišči primere zaporedij z naslednjimi lastnostmi:

   (a) omejeno zaporedje z vsaj dvema stekališčema,

(b) strogo monotono konvergentno zaporedje z limito 1 in natančno spodnjo mejo -1,

(c) nekonvergentno (neomejeno) zaporedje z natanko enim stekališčem,

(d) zaporedje z neskončno stekališči $1, 2, 3, \ldots$.

(e) zaporedje, katerega stekališča so vsa realna števila.

7. Izračunaj naslednje limite:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n-2}{n^2+n+2}$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+n+\sqrt{2n^2-1}}{1+n+\sqrt[3]{2n^2-1}}$,

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+n^2}{3^n+2^n}$,

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+n^3}{3^n+n^3}$,

(e) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^n$,

(f) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{3}{4n})^{5n+1}$,

(g) $\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2+1}{n^2-2})^{n^2}$,

(h) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cos(2n)$,

(i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3n}{2^n}}$,

(j) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^2+1}$,

8. Dana so zaporedja

(a) $a_n = \frac{2n+3}{n^2+n}$,

(b) $a_n = (-1)^n + \frac{\sqrt{3n^2+2}}{2n+\sqrt[3]{2n^3+1}}$,

(c) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{2n^2+1}+5n}{3n+2}$,

(d) $a_n = \frac{n+1}{n} \cdot \cos(\frac{n\pi}{2})$,

(e) $a_n = \frac{n}{n+1}\sin(\frac{n\pi}{3})$,

(f) $a_n = (n^2+1)\cos(\frac{n\pi}{2})$,

(g) $a_n = \frac{2^{n-1}+3}{2^{n+1}+1}$,

(h) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{3^n-1}{3^n+n}$,

(i) $a_n = n + e^{-n}$,

(j) $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n}$,

- Če zaporedje konvergira, mu poišči limito. V nasprotnem primeru pa poišči vsa stekališča danega zaporedja, nato pa za vsako stekališče poskusi najti kakšno konvergentno podzaporedje, ki konvergira k temu stekališču.
- Razišči omejenost zaporedij. Če je katero zaporedje omejeno, mu določi natančno zgornjo oziroma natančno spodnjo mejo.
- Ali je katero od zaporedij monotono (t. j. naraščajoče oziroma padajoče)?

9. Dani sta zaporedji s splošnima členoma

$$a_n = \frac{100^n}{n!}, \qquad b_n = \frac{n^2}{(1.01)^n}.$$

(a) Dokaži, da sta zaporedji prvih 99 členov naraščajoči, od nekega člena naprej pa strogo padajoči. (Nasvet: Opazuj kvocient dveh zaporednih členov.)

(b) Utemelji, da je zaporedje omejeno, ter ima natanko eno stekališče (limito). Določi to limito.

10. Dano je zaporedje vsot:

(a) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$,

(b) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log(n+1)$.

- Pokaži, da je vsako od zaporedij monotono (t.j. naraščajoče oziroma padajoče).
- Ali je katero od zaporedij omejeno oziroma konvergentno?

11. Zaporedje F_n je podano z rekurzivno formulo $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ in začetnima členoma $F_1 = 1$ in $F_2 = 1$. (*Fibonaccijevo zaporedje.*) Z indukcijo dokaži:

(a) $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$,

(b) F_{4n} je deljivo s 3 za vse $n \in \mathbb{N}$.

(c) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$,

(d) $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big((\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\Big)$ za vse $n \in \mathbb{N}$.

12. Zaporedje je podano z rekurzivno zvezo $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}$ in začetnim členom $a_1 = 1$. Ugotovi, ali je zaporedje monotono ali konvergentno oziroma izračunaj limito.

13. Zaporedje je podano z rekurzivno formulo $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n^2 + 1$ in prvim členom $a_1 = 1$.

(a) Z indukcijo dokaži, da je zaporedje navzgor omejeno z 2 in naraščajoče.

(b) Ugotovi, da zaporedje konvergira in izračunaj limito.

14. Dano je zaporedje

$$x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}} \quad (n \text{ korenov}).$$

(a) Z indukcijo dokaži, da je zaporedje x_n navzgor omejeno z 2 in naraščajoče. Ali je to zaporedje konvergentno? V primeru, da je odgovor pritrdilen, izračunaj limito zaporedja.

(b) Z indukcijo dokaži, da so vsi členi zaporedja iracionalna števila. Pokaži tudi, da je $x_n = 2\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$.

(Nasvet: Pomagaj si z rekurzivno formulo zaporedja.)