

## Vaje OMA - Vrste

1. Izračunaj vsote naslednjih vrst:

$$(a) \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \dots,$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{n+3}}{3^{2n-1}},$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)},$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{n+3}+1}{3^{2n-1}}.$$

2. Profesor Baltazar premišljuje o novem izumu. Najprej naredi 4 korake v desno, nato 3 korake v levo, potem za  $\frac{9}{4}$  koraka v desno, pa spet za  $\frac{27}{16}$  koraka v levo, itd. (Pri  $n$ -ti spremembi smeri naredi  $\frac{3^{n-1}}{4^{n-2}}$  koraka.) Kateri točki se približuje profesor?

3. Izračunaj ploščino in obseg Kochove snežinke  $\mathcal{K}$ . Kochova snežinka je ravninski lik, ki ga dobimo z naslednjim postopkom. Začnemo z enakostraničnim trikotnikom  $\mathcal{K}_0$  s tremi ( $N_0 = 3$ ) stranicami dolžine  $d_0 = 1$ , nato pa nad srednjo tretjino vsake od njegovih treh stranic nalepimo enakostranični trikotnik s stranico dolžine  $\frac{1}{3}$ . Dobimo lik  $\mathcal{K}_1$  z  $N_1 = 12$  stranicami dolžine  $d_1 = \frac{1}{3}$ . Nato spet nad srednjo tretjino vsake od dvanajstih stranic lika  $\mathcal{K}_1$  nalepimo enakostranični trikotnik s stranico dolžine  $\frac{1}{9}$ , tako dobimo lik  $\mathcal{K}_2$  z  $N_2 = 48$  stranicami dolžine  $d_2 = \frac{1}{9}$ . Postopek nato ponavljamo in ponavljamo... V pomoč je lahko tudi spletna stran

[http://en.wikipedia.org/wiki/Koch\\_snowflake](http://en.wikipedia.org/wiki/Koch_snowflake)

4. Dokaži, da za delne vsote harmonične vrste velja

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

(Odtod vidimo, kako hitro harmonična vrsta divergira.) Ali poznaš kakšen enostavnejši dokaz, ki dokazuje le divergenco harmonične vrste? (Nasvet: V dokazu si pomagaj z dejstvom, da je zaporedje  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  naraščajoče, zaporedje  $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$  padajoče, obe zaporedji pa konvergirata k  $e$ .)

5. Ugotovi, ali vrsti konvergirata:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

6. S primerjanjem z znanimi vrstami razišči konvergenco naslednjih vrst:

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n+1}, & \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^n, \\
\text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+n-1}, & \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n}, \\
\text{(c)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+2n+2}{n^3-1}, & \text{(f)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}.
\end{array}$$

7. S pomočjo korenskega in kvocientnega kriterija razišči konvergenco naslednjih vrst:

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^{n+1}}, & \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+3n}{4^n-2n}, \\
\text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n}, & \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^{n^2}, \\
\text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)5^n}, & \text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)2^n}{n!}, \\
\text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-n}, & \text{(h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{(2n)!},
\end{array}$$

8. Razišči pogojno in absolutno konvergenco naslednjih vrst:

$$\begin{array}{l}
\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{2^n}, \\
\text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^3+2}, \\
\text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^3+n^2}, \\
\text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n^2}, \\
\text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n^2}, \\
\text{(f)} 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5^4} + \dots,
\end{array}$$

9. Huda mravljica prične svojo pot v koordinatnem izhodišču ravnine. Najprej gre za 1 v desno, nato za  $\frac{1}{2}$  navzgor, zatem za  $\frac{1}{3}$  v levo, nato za  $\frac{1}{4}$  navzdol, potem pa spet desno za  $\frac{1}{5}$ , itd. Dokaži, da je mravljica namenjena proti neki točki? (Ni potrebno ugotoviti, kateri točki se bliža.)

(Nasvet: Posebej opazuj gibanje mravljice v smeri  $x$ -osi ter nato v smeri  $y$ -osi.)

10. Ugotovi, za katere  $a \in \mathbb{R}^+$  naslednje vrste konvergirajo absolutno oziroma pogojno, ter kdaj ne konvergirajo:

$$\begin{array}{l}
\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{na^n}{2^n}, \\
\text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n}}{n^3(a+2)^n}, \\
\text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n}}{(n+1)^3(a+2)^n}.
\end{array}$$

11. Dani sta vrsti  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$  in njena preureditev, kjer dvema pozitivnima členoma vedno sledi negativen:

$$S' = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

- (a) Pokaži, da je podzaporedje lihih členov vrste

$$s_{2n+1} = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}\right)$$

konvergira k številu, ki je manjše od  $\frac{5}{6}$ . Še več,  $S = \frac{5}{6} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)}$ .

- (b) Pokaži, da je podzaporedje vsakega tretjega člena delnih vsot preureditve

$$s'_{3n} = \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right),$$

naraščajoče, ter sklepaj, da preureditev vrste ne more konvergirati k  $\frac{5}{6}$ . Ali  $S'$  sploh konvergira?

12. Iz zaporedja  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sestavimo vrste  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$  in  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ . Dokaži: Če vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira absolutno, potem tudi vrsti  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$  in  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$  konvergirata absolutno.

(Nasvet: Najprej razmisli, da so členi zaporedja  $a_n$  od nekod naprej po absolutni vrednosti manjši od 1.)

13. Dano je zaporedje

$$a_n = \sqrt{\frac{n+2}{n^2+n}}.$$

Iz danega zaporedja sestavi vrste  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  in  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ , ter za vsako izmed njih ugotovi, če konvergira.