Vaje OMA - Realne funkcije

1. Določi definicijska območja naslednjih funkcij:

   (a) $f(x) = \sqrt{|x+3| - 2 + 2x}$,

   (b) $h(x) = \frac{x \arcsin 3x}{\sin(2x)}$,

   (c) $f(x) = \log_{10}(x^2 - 3x - 4)$,

   (d) $g(x) = \log(\log(x))$,

   (e) $f(x) = \arcsin(\frac{x-1}{2x})$,

   (f) $g(x) = \sqrt{-1 + \ln(x+2)}$,

2. Temperaturo lahko merimo v stopinjah Celzija oziroma v stopinjah Fahrenheita. Temperaturo v stopinjah Fahrenheita dobimo, če temperaturo v stopinjah Celzija pomnožimo z $\frac{9}{5}$ in prištejemo 32. Zapiši splošni predpis, ki pretvori temperaturo iz stopinj Celzija v stopinje Fahrenheita. Kaj pa obratno? V kakšni zvezi sta predpisa?

3. Danim funkcijam določi definicijsko območje in zalogo vrednosti. Katere izmed danih funkcij so injektivne? Injektivnim funkcijam nato poišči tudi inverzne funkcije. Za neinjektivne funkcije pa poišči dve različni točki x_1 in x_2, da bosta vrednosti $f(x_1)$ in $f(x_2)$ enaki.

   (a) $g(x) = \cos(3x - \frac{\pi}{12})$,

   (b) $f(x) = 1 - 2\arcsin(3x+1)$

   (c) $g(x) = \frac{-4+\sqrt{4^x-2}}{2^x-4}$,

   (d) $f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$

   (e) $f(x) = \frac{\sqrt{3x}+1}{\sqrt{2x}-1}$, $f(x) = \frac{3x^3-2}{8x^3-1}$,

   (f) $f(x) = \frac{2e^{3x}+1}{e^{3x}-2}$.

4. Funkcija f je podana s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} \arcsin(x), & -1 \leq x < 1 \\ 2 + 2\log(x), & x \geq 1 \end{cases}.$$

   (a) Zakaj f, kot funkcija $f\colon [-1, \infty) \to \mathbb{R}$, ni surjektivna? Ugotovi, kaj je potrebno namesto $\mathbb{R}$ vzeti za kodomeno funkcije f, da bo surjektivna. (Nasvet: Določi zalogo vrednosti funkcije f.)

(b) Dokaži, da je funkcija f injektivna in ji poišči inverzno funkcijo.

5. Dani sta funkciji $f(x) = 1 - \cos(x)$ in $g(x) = \sqrt[3]{2x}$.

   (a) Izračunaj kompozitume $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ in $g \circ g \circ g$. Ali velja $f \circ g = g \circ f$?

   (b) Ugotovi še, katere izmed funkcij f, g, $f \circ g$, $g \circ f$ in $f \circ f$ so lihe oziroma katere sode. (Navet: Če funkcija ni soda, potem poišči točko x_1, da bo $f(x_1) \neq f(-x_1)$. Če funkcija ni liha, pa poišči točko x_1, da bo $f(x_1) \neq -f(x_1)$.)

6. Naj bosta $f\colon A \to \mathbb{R}$ in $g\colon B \to \mathbb{R}$ taki funkciji, da je njun kompozitum $f \circ g$ dobro definirana funkcija. Dokaži spodaj podane trditve. (Če ne gre v splošnem, jih preveri vsaj na primerih $y = x^3$ in $y = \cos x$, $y = x^2$ in $y = -x$.)

   (a) Če sta f in g (strogo) naraščajoči funkciji, potem je tudi $f \circ g$ (strogo) naraščajoča funkcija. Če pa sta f in g (strogo) padajoči, je $f \circ g$ (strogo) padajoča.

   (b) Če sta f in g injektivni, potem je tudi $f \circ g$ injektivna. Če pa sta f in g surjektivni, potem je tudi $f \circ g$ surjektivna.