

OMA - Vaje - Limite in zveznost funkcij

1. Dana je funkcija $f(x) = 3x + 1$.

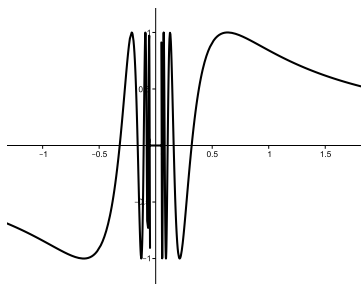
- (a) Ugotovi, za katere $x \neq 1$ se vrednosti funkcije $f(x)$ od 4 razlikujejo za manj kot $\frac{1}{100}$, ter določi kakšno punktirano okolico točke 1, da se bodo vrednost $f(x)$ od 4 razlikovale za manj kot $\frac{1}{100}$.
- (b) Pokaži s pomočjo definicije limite funkcije, da je $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$, tj. za poljuben $\varepsilon > 0$ poišči $\delta > 0$, da bo $|f(x) - 4| < \varepsilon$, če bo le $|x - 1| < \delta$, $x \neq 1$.)

2. Izračunaj naslednje limite:

- | | |
|---|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$, | (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3}$, |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}$, | (h) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{4x^2})^{x^2}$, |
| (č) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2+x+x} - \sqrt[3]{x^2}}{x-3\sqrt{x}}$, | (i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{3}{4x})^{-x}$, |
| (c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x}$, | (j) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{3+\frac{4}{x}}$, |
| (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x}$, | (k) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{\sin x}}$, |
| (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$, | (l) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan(\frac{1}{x})$, |
| (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan(3x)}{\sin^2(2x)}$, | (m) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan(\frac{1}{x})$. |

3. Razišči obstoj naslednjih limit:

- | | |
|---|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin \frac{1}{x})$, | (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin(x)e^{-x})$. |
| (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin(x)$, | (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x})$. |



4. Dana je funkcija $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-1}$. Izberi si neko (čim bolj enostavno) strogo naraščajočo zaporedje a_n z limito 1, ki ga podaj tudi s splošnim členom. Nato izračunaj limito zaporedja $f(a_n)$, torej $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 + a_n - 2}{a_n^2 - 1}$, če ta obstaja. Ali se $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ spremeni, če vzameš katero drugo zaporedje $a_n \neq 1$ z limito 1? Limito $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ primerjaj z limito $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

5. Naj bo $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ monotona funkcija (naraščajoča ali padajoča). Dokaži, da velja: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L \iff \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$. (Nasvet: Primerjaj definiciji limit.)

6. Dani sta funkciji

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & x < -2 \\ x^2, & -2 \leq x < 1 \\ 2 - x, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{3x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}.$$

- (a) Izračunaj tiste limite $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ in $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, ki obstajajo.
- (b) Določi območje zveznosti in točke nezveznosti funkcije f . Utemelji, zakaj funkcija g pri vrednosti parametra $a = 3$ ni zvezna v točki 0. Poišči tak parameter a , da bo funkcija g zvezna povsod.

7. Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 4, & x \leq -1 \\ a \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1} + b, & -1 < x \leq 0 \\ \frac{\sin(3x) \tan(\frac{x}{2})}{2x \sin(2x)}, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

kjer sta a in b realna parametra. Izračunaj limiti $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ in $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, ter določi parametra a in b , da bo funkcija f zvezna povsod, kjer je definirana.

8. Za katera realna števila a , b in c je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(\frac{1}{x-1}) + a, & x > 1 \\ (1 - 2x)^{\frac{1}{3x}}, & 1 \geq x > 0 \\ b, & x = 0 \\ \frac{\sin^2(cx) \cos(3x)}{x^2}, & x < 0 \end{cases},$$

zvezna povsod, kjer je definirana?

9. Dani sta funkciji

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \\ x^{\frac{1}{x}}, & x \in \mathbb{N} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 2, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}.$$

- (a) Določi točke zveznosti in točke nezveznosti funkcije f . Ali v kateri točki $c \in \mathbb{R}$ ne obstaja niti limita $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$?
- (b) Utemelji, zakaj je funkcija g zvezna v točki $x = 1$. (Nasvet: Opazi, da g preslika člene poljubnega konvergentega zaporedja a_n z limito 1 tako, da racionalne člene preslika v 2, iracionalne pa v $2a_n$, torej v zaporedje z limito 2.)
- (c) Pokaži, da funkcija g ni zvezna nikjer drugod (razen v 1). (Nasvet: Poišči konvergentni zaporedji racionalnih števil a_n in iracionalnih števil b_n z limito 3, ki ju f preslika v zaporedji z različnima limitama.) ter določi limiti $\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n)$ in $\lim_{n \rightarrow \infty} g(b_n)$.

10. Ugotovi, ali imajo dane funkcije na danih intervalih kakšno ničlo. V primeru pritrilnega odgovora potem z metodo bisekcije poišči kakšen približek za ničlo, ter razmisli, kako natančen je. (Napravi vsaj štiri korake metode.)
- (a) $g(x) = -x^4 + 3x + 2$ na intervalih $[-1, 0]$ in $[2, 3]$,
- (b) $f(x) = x - 2 \sin(x)$ na intervalu $[\frac{\pi}{2}, \pi]$?
11. Z metodo bisekcije poišči približne rešitve naslednjih nalog:
- (a) Ali ima enačba $x2^x = 1$ kakšno rešitev na intervalu $[0, 1]$? Če je tvoj odgovor pritrilen, potem poišči kakšen približek rešitve.
- (b) Razloži, zakaj se grafa funkcij $f(x) = x^2$ in $g(x) = e^{-x}$ sekata nad intervalom $[0, 1]$. Z metodo bisekcije poišči približek presečne točke. (Napravi vsaj pet korakov.) Kako natančen približek dobiš?
- (c) Utemelji, da funkcija $g(x) = -x^3 + 3x + 2$ v neki točki na intervalu $[-1, 0]$ zavzame vrednost 1. Z metodo bisekcije nato poišči približek take točke.
12. Dana je zvezna funkcija $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Dokaži, da ima funkcija f fiksno točko, t.j. obstaja točka $x_0 \in [0, 1]$, da je $f(x_0) = x_0$.
13. Pokaži, da na ekvatorju obstajata diametralno nasprotni točki, ki imata enako temperaturo.
- (Nasvet: Naj bo $T(\varphi)$ funkcija temperature v odvisnosti od geografske dolžine $\varphi \in [0, 2\pi]$, $T(0) = T(2\pi)$. Razloži, da je dovolj pokazati, da ima $g(\varphi) = T(\varphi) - T(\varphi + \pi)$ ničlo na intervalu $[0, \pi]$ in obstoj ničle tudi utemelji.)
14. Naj bo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ injektivna in zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$. Dokaži, da je f bodisi strogo naraščajoča bodisi strogo padajoča. (Nasvet: Predpostavi nasprotno in najprej razmisli, da v tem primeru obstajajo točke $x_1 < x_2 < x_3$, da velja bodisi $f(x_1), f(x_3) > f(x_2)$ bodisi $f(x_3), f(x_1) < f(x_2)$. Potem poskusi priti do protislovja.)
15. Ugotovi, katere izmed naslednjih funkcij so enakomerne zvezne na danih intervalih:
- (a) $f(x) = x^3$ na intervalu $[0, 1]$.
- (b) $f(x) = \sqrt{x}$ na intervalih $[1, \infty)$ oziroma $[0, \infty)$.