

UNIVERZA V LJUBLJANI

PEDAGOŠKA FAKULTETA

Elementarna geometrija

(zapiski predavanj)

Eva Horvat

5. junij 2025

Kazalo

1	Uvodni pojmi	5
1.1	Metrični prostor	5
1.2	Aksiomatski sistem	7
1.3	Incidenčna geometrija ravnine	8
2	Ravninska geometrija	13
2.1	Aksiom ravnila	13
2.2	Vmesnost točk	15
2.3	Daljica, poltrak, kot in trikotnik	17
2.4	Skladnost daljic	19
2.5	Separacija ravnine	20
2.6	Konveksni štirikotniki	24
2.7	Sedem mostov Königsberga	25
2.8	Merjenje kotov	26
2.9	Skladnost trikotnikov	28
2.10	Geometrijske neenakosti	31
3	Vzporednost in nevtralna geometrija	37
3.1	Nevtralna geometrija	37
3.2	Aksiomi o vzporednici	42
3.3	Model hiperbolične geometrije	43
4	Evklidska geometrija	47
4.1	Vzporedne projekcije	49
4.2	Podobnost trikotnikov	52
4.3	Pitagorov izrek	53
4.4	Evklidska geometrija trikotnikov	56
5	Večkotna področja in njihove ploščine	65
6	Krožnice	69
6.1	Krožnica in premice	70
6.2	Krožnice in trikotniki	71
6.3	Krožnice v evklidski geometriji	73

7	Kartezični koordinatni sistemi	79
8	Transformacije v geometriji	83
9	Geometrijske konstrukcije	87
9.1	Konstruktibilnost algebrskih izrazov	92

Poglavje 1

Uvodni pojmi

1.1 Metrični prostor

Beseda “geometrija” izhaja iz starogrške besede $\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$ (geometria), ki pomeni “merjenje zemlje”. Geometrija je ena najstarejših matematičnih ved, ki se ukvarja z lastnostmi prostora, kot so razdalja, oblika, velikost, ter z relacijami med različnimi geometrijskimi objekti. Njene temelje so postavili že starogrški matematiki, ki so o geometrijskih problemih veliko razmišljali in tudi pisali; njihova dela predstavljajo temelj današnje evklidske geometrije.

V sodobni matematiki pojem razdalje ni več vezan zgolj na vsem dobro znano razdaljo med točkami v evklidskem prostoru \mathbb{R}^n . V splošnem razdaljo med točkami nekega (abstraktnega) prostora definiramo takole.

Definicija. Metrika na množici M je funkcija $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, za katero velja:

- (i) $\forall x, y \in M: d(x, y) \geq 0$ (nenegativnost),
- (ii) $\forall x, y \in M: d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (neizrojenost),
- (iii) $\forall x, y \in M: d(x, y) = d(y, x)$ (simetričnost),
- (iv) $\forall x, y, z \in M: d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (trikotniška neenakost).

Definicija. Metrični prostor je urejeni par (M, d) , kjer je M neka množica, d pa je metrika na množici M .

Zgled 1. Na množici realnih števil običajno uporabljamo metriko, podano s predpisom $d(x, y) = |x - y|$ za poljubni števili $x, y \in \mathbb{R}$.

Zgled 2. V ravnini \mathbb{R}^2 evklidsko razdaljo med dvema točkama (x_1, y_1) in (x_2, y_2) izračunamo kot

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Definicija. Naj bo (M, d) metrični prostor. Za poljubno točko $a \in M$ ter pozitivno število $r > 0$ definiramo **zaprto kroglo** s središčem v a in polmerom r kot množico $\mathcal{Z}(a, r)$ vseh točk prostora M , ki so od a oddaljene za največ r :

$$\mathcal{Z}(a, r) = \{x \in M \mid d(x, a) \leq r\} .$$

Odprta kroglja s središčem v a in polmerom r je množica $\mathcal{O}(a, r)$ vseh točk v M , ki so od a oddaljene za manj kot r : $\mathcal{O}(a, r) = \{x \in M \mid d(x, a) < r\}$. **Sfera** s središčem a in polmerom r pa je množica vseh točk prostora M , ki so od a oddaljene natanko za r :

$$\mathcal{K}(a, r) = \{x \in M \mid d(x, a) = r\} .$$

Zgled 3. Na množici realnih števil \mathbb{R} z običajno metriko je zaprta kroglja $\mathcal{Z}(0, 1)$ množica vseh točk, katerih absolutna vrednost je manjša ali enaka 1, torej zaprti interval $[-1, 1]$. Odprta kroglja je ustrezeni odprti interval $\mathcal{O}(0, 1) = (-1, 1)$, sfera $\mathcal{K}(0, 1)$ pa vsebuje le dve točki z absolutno vrednostjo 1: $\mathcal{K}(0, 1) = \{-1, 1\}$.

Zgled 4. V ravnini \mathbb{R}^2 z evklidsko metriko je sfera s središčem v točki (a, b) in polmerom r množica točk $\mathcal{K}((a, b), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$, to je običajna krožnica.

Zgled 5. V nekem mestu so vse ulice popolnoma ravne in potekajo bodisi v smeri sever - jug bodisi v smeri vzhod - zahod. Potovanje z avtomobilom v takem mestu je osnova za idejo ti. taksi - metrike, v kateri razdaljo med poljubnima točkama definiramo z

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| .$$

Preverite, da je to res metrika. Kako izgledajo krogle v tej metriki?

Zgled 6. Kako bi merili razdaljo med točkami na enotski krožnici v kompleksni ravnini

$$S = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} ?$$

Če se nahajamo na krožnici, od točke A do točke B pridemo vzdolž krožnega loka, ki ti dve točki povezuje. Ker je krožnica sklenjena, imamo dva loka, ki ti dve točki povezujeta, smiselno pa je potovati vzdolž krajšega. Poljubno točko krožnice lahko v polarnih koordinatah na enoličen način izrazimo kot $z = \cos(\phi) + i \sin(\phi) = e^{i\phi}$, kjer je $\phi \in [0, 2\pi)$. Tako bi za razdaljo med dvema točkama krožnice lahko razglasili

$$d(e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2}) = \min \{|\phi_1 - \phi_2|, 2\pi - |\phi_1 - \phi_2|\} .$$

Ali je tako definirana razdalja metrika?

Zgled 7. V ravnini \mathbb{R}^2 definirajmo razdaljo med točkama (x_1, y_1) in (x_2, y_2) s predpisom

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\} .$$

Na vajah ste preverili, da je d_∞ res metrika v ravnini \mathbb{R}^2 . Kako izgledajo krogle v tem metričnem prostoru? Zaprta kroglja s središčem v izhodišču in polmerom 1 je množica točk $\mathcal{Z}((0, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x| \leq 1 \text{ in } |y| \leq 1\}$; to je kvadrat z oglišči $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ in $(-1, 1)$.

Zgled 8. Naj bo n neko naravno število. Na končni množici $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ definiramo funkcijo $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{če } x \neq y \\ 0, & \text{če } x = y. \end{cases}$$

Preverimo, da je to metrika na množici M .

- (i) (nenegativnost) Po definiciji je $d(x, y) \geq 0$ za vsak $x, y \in M$.
- (ii) (neizrojenost) Za vsak $x, y \in M$ velja $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- (ii) (simetričnost) Za vsak $x, y \in M$ velja $d(x, y) = d(y, x)$.
- (iv) (trikotniška neenakost) Naj bodo $x, y, z \in M$ poljubne točke. Uporabimo analizo primerov:
 - Če $x \neq z$, sta števili x in z različni, torej ne moreta biti obe hkrati enaki številu y . Iz tega sledi, da je $x \neq y$ ali $z \neq y$, torej je $d(x, y) + d(y, z) \geq 1 \geq d(x, z)$.
 - Če pa velja $x = z$, iz nenegativnosti d sledi $d(x, z) = 0 \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Dokazali smo, da je d res metrika na M . Kako izgledajo krogle v tej nenavadni metriki? Če se postavimo v poljubno točko prostora M , so vse ostale točke od nje oddaljene natanko za 1. Zaprta krogla s središčem v poljubni točki $a \in M$ in polmerom $r < 1$ vsebuje le točko a , medtem ko zaprta krogla s središčem v a in polmerom 1 vsebuje celoten prostor. Za poljuben $a \in M$ torej velja $\mathcal{K}(a, 1) = M \setminus \{a\}$ in

$$\mathcal{Z}(a, r) = \begin{cases} \{a\}, & 0 < r < 1, \\ M, & r \geq 1. \end{cases}$$

Zgornji zgledi pokažejo, da je oblika krogel v metričnem prostoru odvisna od tega, kako definiramo razdaljo med točkami. Z drugo metriko dobimo drugačno geometrijo, v kateri lahko veljajo tudi drugačna pravila, kot smo jih vajeni. Če želimo v ravnini \mathbb{R}^2 izračunati razdaljo med točkama $A(-2, 3)$ in $B(4, 1)$, v običajni evklidski metriki dobimo $d(A, B) = 2\sqrt{10}$, v taksi metriki $d_1(A, B) = 8$ in v ∞ -metriki $d_\infty(A, B) = 6$. V nadaljevanju bomo natančno obravnavali geometrijsko teorijo, v kateri razdalja oz. metrika ni konkretno podana. Videli bomo, da je ta teorija veljavna v dveh bistveno različnih metričnih prostorih.

1.2 Aksiomatski sistem

Pri tem predmetu se bomo ukvarjali z geometrijo. Osnove evklidske geometrije ste že precej natančno obdelali pri pouku matematike v osnovni in srednji šoli. Naš cilj pa bo začeti na začetku in celotno geometrijo postaviti na trdne temelje, ki se imenujejo aksiomi. Razlogov za tako obravnavo je več:

- s tem bomo bolj poglobljeno razumeli geometrijske pojme in zakonitosti,
- pokazali bomo, kako zgolj iz nekaj osnovnih pojmov ter aksiomov zgradimo bogato in zanimivo matematično teorijo,
- geometrija je ena najstarejših vej matematike, ki je zgodovinsko vplivala na strukturo modernih matematičnih teorij.

Matematične teorije imajo posebno zgradbo, ki temelji na zbirki **osnovnih pojmov** in **aksiomov**. Osnovni pojmi so pojmi, ki jih ne definiramo, a so bistveni gradniki dane teorije. Aksiomi pa so trditve, katerih resničnost v tej teoriji privzamemo. Na podlagi resničnosti aksiomov z logičnim sklepanjem izpeljemo vse ostale trditve (leme, izreke, posledice), ki v tej teoriji veljajo.

1.3 Incidenčna geometrija ravnine

Aksiomatsko zgradbo ravninske geometrije bomo začeli z urejenim parom $(\mathcal{R}, \mathcal{P})$, kjer je \mathcal{R} neka množica, \mathcal{P} pa je neka družina podmnožic množice \mathcal{R} . Elemente množice \mathcal{R} imenujemo **točke**, elemente množice \mathcal{P} pa imenujemo **premice**. Množico \mathcal{R} imenujemo **ravnina**. V naši formalni matematični teoriji bomo uvedli aksiome. Ti aksiomi bodo vsebovali vse, kar bomo o točkah in premicah privzeli kot dejstva. Zato je pomembno, da (vsaj zaenkrat) svoje dosedanje znanje oz. vedenje o točkah in premicah "pospravimo v ločeni predal" in v naši geometriji ne privzamemo ničesar drugega kot gole aksiome. Sčasoma pa bomo iz teh aksiomov izpeljali tudi druge trditve in izreke in tako spoznali strukturo geometrije kot matematične teorije.

Naš prvi aksiom pravi:

Aksiom. I-0. Vsaka premica je množica točk.

Če je točka T element premice p , bomo rekli, da T **leži na** premici p ali da premica p **poteka skozi** točko T (oziroma, da premica p vsebuje točko T). Točke, ki ležijo na isti premici, imenujemo **kolinearne** točke.

Aksiom. I-1. Za poljubni dve različni točki obstaja natanko ena premica, ki ti dve točki vsebuje.

Premico, ki vsebuje različni točki A in B , bomo označili z \overleftrightarrow{AB} . Ta oznaka naj bi spominjala na običajno predstavo o premici kot ravni črti, ki se v obe smeri neomejeno nadaljuje.

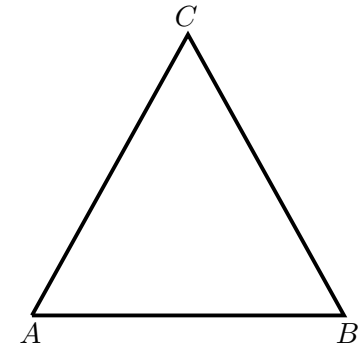
Aksiom. I-2. Vsaka premica vsebuje vsaj dve različni točki.

Aksiom. I-3. Ravnina vsebuje vsaj tri nekolinearne točke.

Geometrijo, v kateri velja ta preprosti nabor aksiomov, imenujemo **incidenčna geometrija ravnine**. Oglejmo si nekaj trditev, ki v incidenčni geometriji veljajo.

Izrek 1. Poljubni dve različni premici se sekata v največ eni točki.

Dokaz Denimo, da se premici p in q sekata v dveh različnih točkah A in B . Po aksiomu **I-1** sledi $p = q$, torej p in q nista različni premici. \square



Slika 1.1: Ravnina treh točk

Zgled 9 (Ravnina treh točk). Po aksiomu **I-3** v vsaki incidenčni geometriji obstajajo vsaj tri točke. Razmislimo, ali obstaja incidenčna geometrija, v kateri ravnina vsebuje le tri točke. Imejmo ravnino z le tremi točkami, ki jih označimo z A , B in C . Po aksiomu **I-3** točke A , B in C ne ležijo na isti premici. Po aksiomu **I-1** obstaja natanko ena premica \overleftrightarrow{AB} , ki vsebuje točki A in B , natanko ena premica \overleftrightarrow{AC} , ki vsebuje točki A in C , ter natanko ena premica \overleftrightarrow{BC} , ki vsebuje točki B in C . Ker so točke A , B in C nekolinearne, so premice \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{AC} in \overleftrightarrow{BC} paroma različne, torej vsaka od njih vsebuje natanko dve točki in velja $\overleftrightarrow{AB} = \{A, B\}$, $\overleftrightarrow{AC} = \{A, C\}$ ter $\overleftrightarrow{BC} = \{B, C\}$. Ali v tej ravnini obstaja še kakšna premica? Denimo, da bi obstajala še ena premica p ; tedaj po aksiomu **I-2** na p ležita vsaj dve izmed točk A , B in C , obenem pa vse tri točke na p ne morejo ležati, ker so nekolinearne. To pa pomeni, da je p enaka eni od premic \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{AC} in \overleftrightarrow{BC} in so te tri premice edine premice te ravnine. S tem je izpolnjen tudi aksiom **I-2**, saj vsaka od premic vsebuje natanko dve točki. Incidenčna geometrija z le tremi točkami potemtakem obstaja.

Izrek 2. Če je T poljubna točka, obstaja vsaj ena premica, na kateri T ne leži.

Dokaz Naj bo T poljubna točka. Po aksiomu **I-3** ravnina vsebuje vsaj tri nekolinearne točke A , B in C . Uporabimo analizo primerov.

1. možnost: Če je T ena izmed točk A , B in C , lahko brez škode za splošnost privzamemo, da je $T = A$. Po aksiomu **I-1** obstaja natanko ena premica p , na kateri ležita točki B in C . Točka T ne leži na premici p , saj so A , B in C nekolinearne točke.
2. možnost: Denimo sedaj, da je T različna od točk A , B in C . Tedaj po aksiomu **I-1** obstaja natanko ena premica p , na kateri ležita točki A in B , natanko ena premica q , na kateri ležita točki A in C , ter natanko ena premica r , na kateri ležita točki B in C . Če bi točka T hkrati ležala na premicah p in q , bi to pomenilo, da premici p in q hkrati vsebujeta dve različni točki A in T , iz česar bi po aksiomu **I-1** sledilo $p = q$

in bi potemtakem točke A , B in C ležale na isti premici, kar pa ni mogoče (saj so nekolinearne). Torej točka T na vsaj eni od premic p in q ne leži. \square

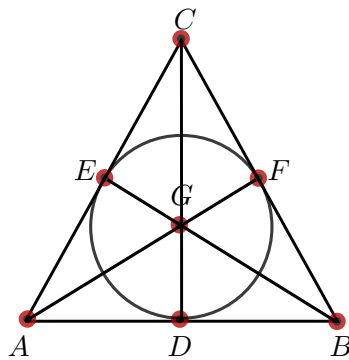
Zgled 10. V neki ravnini imamo natanko šest točk A , B , C , D , E in F ter natanko pet premic $\{A, B, C\}$, $\{D, E, F\}$, $\{A, D\}$, $\{B, E\}$, $\{C, F\}$. Za vsakega od incidenčnih aksiomov razmislimo, ali je v tej ravnini izpolnjen ali ne. Ali gre za incidenčno geometrijo ravnine?

Izrek 3. Če je p poljubna premica, tedaj obstaja vsaj ena točka, ki ne leži na premici p .

Dokaz Naj bo p poljubna premica. Po aksiomu **I-3** v ravnini obstajajo tri nekolinearne točke. Vsaj ena od njih torej ne leži na premici p . To je iskana točka. \square

Izrek 4. Če je p poljubna premica, potem obstajata vsaj dve premici q in r , tako da so p , q in r paroma različne in da q in r obe sekata premico p .

Dokaz Naj bo p poljubna premica. Po izreku 3 obstaja vsaj ena točka T , ki ne leži na premici p . Po aksiomu **I-2** premica p vsebuje vsaj dve različni točki U in V . Po aksiomu **I-1** obstaja natanko ena premica q , ki vsebuje točki T in U , ter natanko ena premica r , ki vsebuje točki T in V . Če bi veljalo $q = r$, bi premice p , q in r vse tri vsebovale različni točki U in V , iz česar bi po aksiomu **I-1** sledilo $p = q = r$. To pa ni mogoče, ker točka T ne leži na premici p . Prav tako ne more veljati $p = q$ ali $p = r$, ker premici q in r vsebujeta točko T , ki ne leži na premici p . Torej so premice p , q in r paroma različne. \square



Slika 1.2: Fanova ravnina

Zgled 11 (Projektivna ravnina). Denimo, da aksiomom incidenčne geometrije **I-0**, **I-1**, **I-2**, **I-3** dodamo še dodatna aksioma: **I-2'**: Vsaka premica vsebuje vsaj tri različne točke. **I-4**: Poljubni dve različni premici se sekata v natanko eni točki.

V tem primeru dobimo geometrijo, ki se imenuje **projektivna ravnina**. Najmanjši primer projektivne ravnine je ti. Fanova ravnina, ki se imenuje po italijanskem matematiku Ginu Fanu (1871-1952). Razmislimo, kako jo dobimo. Po aksiomu **I-3** v tej geometriji obstajajo vsaj tri nekolinearne točke A , B in C . Po aksiomu **I-1** obstaja natanko ena premica \overleftrightarrow{AB} , na kateri ležita točki A in B , natanko ena premica \overleftrightarrow{AC} , na kateri ležita točki A in C , ter

natanko ena premica \overleftrightarrow{BC} , na kateri ležita točki B in C . Po aksiomu **I-2'** premica \overleftrightarrow{AB} vsebuje vsaj še eno točko, ki ni enaka C (ker so A , B in C nekolinearne), označimo to točko z D . Prav tako po aksiomu **I-2'** premica \overleftrightarrow{AC} vsebuje vsaj še eno točko, ki ni enaka B in ni enaka D (sicer bi premici \overleftrightarrow{AB} in \overleftrightarrow{AC} po aksiomu **I-1** sovpadali, kar pa ni mogoče, saj točke A , B in C ne ležijo na isti premici), označimo to točko z E . Po podobnem razmisleku ugotovimo, da premica \overleftrightarrow{BC} vsebuje vsaj še eno točko, ki je različna od točk A , D in E ; označimo to točko s F . Sedaj po aksiomu **I-1** sledi, da v naši ravnini obstajajo tudi premice \overleftrightarrow{AF} , \overleftrightarrow{BE} in \overleftrightarrow{CD} . Vsaka od njih po aksiomu **I-2'** vsebuje vsaj še eno točko. Denimo, da bi premica \overleftrightarrow{AF} vsebovala še točko D ; iz tega bi po aksiomu **I-1** sledilo, da je $\overleftrightarrow{AF} = \overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BC}$, saj bi vsaki dve izmed teh treh premic imeli po dve skupni točki. Tu pa pridemo v protislovje z dejstvom, da točke A , B in C ne ležijo na isti premici. Torej premica \overleftrightarrow{AF} ne vsebuje točke D in na podoben način lahko razmislimo, da premica \overleftrightarrow{AF} ne vsebuje nobene izmed točk D , B , C , F , zato vsebuje še neko novo točko G . Analogno dokažemo, da tudi premici \overleftrightarrow{BE} in \overleftrightarrow{CD} lahko izmed preostalih točk ravnine vsebujeta le točko G . Po aksiomu **I-1** v naši ravnini obstajajo še premice \overleftrightarrow{DE} , \overleftrightarrow{DF} in \overleftrightarrow{EF} , ki pa lahko sovpadejo v premico $\{D, E, F\}$ in s tem zadostijo tudi aksiomu **I-2'**. Tako smo dobili geometrijo s sedmimi točkami A , B , C , D , E , F , G ter sedmimi premicami $\{A, B, D\}$, $\{B, C, F\}$, $\{A, C, E\}$, $\{A, F, G\}$, $\{C, D, G\}$, $\{B, E, G\}$ in $\{D, E, F\}$.

Izrek 5. Če je T poljubna točka, potem obstajata točki U in V , tako da so T , U in V nekolinearne.

Dokaz Naj bo T poljubna točka. Po izreku 2 obstaja vsaj ena premica p , ki ne vsebuje točke T . Po aksiomu **I-2** premica p vsebuje vsaj dve različni točki U in V . Dokažimo, da so točke T , U in V nekolinearne. Če bi T , U in V ležale na isti premici q , bi po aksiomu **I-1** sledilo, da je $p = q$ in dobimo protislovje, saj $T \notin p$. Torej so T , U in V nekolinearne. \square

Poglavje 2

Ravninska geometrija

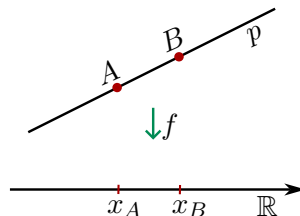
2.1 Aksiom ravnila

Strukturo geometrije, ki smo jo uvedli dosedaj, predstavlja urejeni par $(\mathcal{R}, \mathcal{P})$, kjer je \mathcal{R} množica vseh točk, ki jo imenujemo ravnina, \mathcal{P} pa je družina njenih podmnožic, ki jih imenujemo premice. To strukturo bomo sedaj obogatili s pojmom razdalje, ki je eden najbolj ključnih geometrijskih pojmov. Poljubnemu paru točk ustreza realno število, ki ga imenujemo razdalja med tema točkama. Pojem razdalje je s preostalimi geometrijskimi objekti povezan preko aksioma ravnila, ki ga bomo navedli v nadaljevanju.

Spomnimo se, da si realna števila pogosto predstavljamo kot točke na premici, s čimer tudi lažje predstavimo njihovo urejenost glede na relacijo $<$. Če želimo, da se tudi premice naše geometrije "obnašajo kot" realna os v analitični geometriji, bi to pomenilo, da lahko točke poljubne premice p identificiramo z realnimi števili. To identifikacijo dosežemo z bijektivno preslikavo, ki premico naše geometrije preslika na množico realnih števil.

A1 (Aksiom ravnila) Obstaja funkcija $d: \mathcal{R} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki poljubnima točkama $P, Q \in \mathcal{R}$ priredi število $d(P, Q)$. Za poljubno premico p obstaja bijektivna funkcija $f: p \rightarrow \mathbb{R}$, za katero velja $d(P, Q) = |f(P) - f(Q)|$ za poljubni točki $P, Q \in p$.

Število $d(P, Q)$ imenujemo **razdalja** med točkama P in Q . To oznako bomo v nadaljevanju poenostavili in namesto $d(P, Q)$ pisali PQ .



Slika 2.1: Koordinatni sistem na premici

Definicija. Naj bo p poljubna premica. **Koordinatni sistem** za premico p je bijektivna

funkcija $f: p \rightarrow \mathbb{R}$, za katero velja $PQ = |f(P) - f(Q)|$ za poljubni točki $P, Q \in p$. Število $x = f(P)$ imenujemo **koordinata** točke P za poljubno točko $P \in p$.

Aksiom **A1** nam torej pove, da vsaka premica naše geometrije premore svoj koordinatni sistem. Aksiom ravnila ga imenujemo zato, ker omogoča “neskončno ravnilo”, ki ga lahko postavimo na poljubno premico in nato vzdolž te premice merimo razdalje. Izkaže se, da vzdolž neke premice obstaja veliko (neskončno mnogo različnih) koordinatnih sistemov.

Trditev 6. Če je f koordinatni sistem za premico p , tedaj je tudi funkcija $g: p \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $g(T) = -f(T)$ za vsako točko $T \in p$ koordinatni sistem za premico p .

Dokaz Dokažimo, da je g bijektivna funkcija. Če je $g(A) = g(B)$ za neki točki $A, B \in p$, iz tega sledi tudi $f(A) = -g(A) = -g(B) = f(B)$ in ker je f injektivna funkcija, sledi $A = B$. Torej je tudi g injektivna funkcija. Za dokaz surjektivnosti izberimo poljubno realno število $x \in \mathbb{R}$. Ker je f surjektivna funkcija, obstaja točka $C \in p$, za katero je $f(C) = -x$, torej $g(C) = -f(C) = x$ in je tudi g surjektivna.

Izberimo poljubni točki $P, Q \in p$. Ker je f koordinatni sistem za p , velja $PQ = |f(P) - f(Q)| = |-g(P) + g(Q)| = |g(P) - g(Q)|$, torej je tudi g koordinatni sistem za premico p . \square

Trditev 7. Naj bo f koordinatni sistem za premico p in naj bo a poljubno realno število. Tedaj je tudi funkcija $g: p \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $g(T) = f(T) + a$ za vsako točko $T \in p$ koordinatni sistem za premico p .

Dokaz Dokaz naj bralec za vajo izvede sam.

Iz trditve 6 in 7 dobimo naslednjo posledico.

Posledica 8 (Umeritev premice). Naj bosta A in B različni točki premice p . Tedaj obstaja koordinatni sistem za premico p , v katerem je koordinata točke A enaka 0 in koordinata točke B pozitivno število.

Dokaz Po aksiomu **A1** obstaja nek koordinatni sistem $f: p \rightarrow \mathbb{R}$ za premico p . Označimo $x = f(A)$ in $y = f(B)$ koordinati točk A in B . Po trditvi 7 je tudi funkcija $g: p \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $g(T) = f(T) - x$ koordinatni sistem na p , za katerega velja $g(A) = 0$. Če je $y > x$, sledi $g(B) = f(B) - x = y - x > 0$ in koordinata točke B je pozitivna. Če pa je $y < x$, tedaj je po trditvi 6 funkcija $h: p \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $h(T) = -g(T)$ koordinatni sistem za p , za katerega velja $h(A) = 0$ in $h(B) = -g(B) = x - y > 0$. \square

Lema 9. Razdalja $d: \mathcal{R} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ med točkami v ravnini je metrika na množici \mathcal{R} .

Dokaz Preveriti moramo, da funkcija d zadošča vsem pogojem iz definicije metrike. Za poljubni točki $P, Q \in \mathcal{R}$ velja:

- Če je $P \neq Q$, tedaj po aksiomu **I-1** obstaja natanko ena premica $p = \overleftrightarrow{PQ}$, ki vsebuje točki P in Q . Po aksiomu **A1** obstaja koordinatni sistem $f: p \rightarrow \mathbb{R}$, za katerega velja $d(P, Q) = |f(P) - f(Q)| = |f(Q) - f(P)| = d(Q, P)$. Torej je $d(P, Q) = d(Q, P) \geq 0$.

- Če pa je $P = Q$, tedaj po aksiomu **I-3** obstaja točka A , ki ni enaka P , in po aksiomu **I-1** obstaja natanko ena premica $p = \overleftrightarrow{PA}$, ki vsebuje točki P in A . Po aksiomu **A1** obstaja koordinatni sistem $f: p \rightarrow \mathbb{R}$, za katerega velja $d(P, Q) = |f(P) - f(Q)| = d(Q, P) = 0$. Torej je $d(P, Q) = d(Q, P) = 0$.

S tem smo dokazali, da za poljubni dve točki $P, Q \in \mathcal{R}$ velja $d(P, Q) = d(Q, P) \geq 0$, torej sta pogoja (i) in (iii) iz definicije metrike izpolnjena. Dokazali smo tudi, da za poljubni točki $P, Q \in \mathcal{R}$ iz $P = Q$ sledi $d(P, Q) = 0$. Kaj pa obratno? Če sta P in Q poljubni dve različni točki v ravnini \mathcal{R} , tedaj za koordinatni sistem f poljubne premice, ki vsebuje točki P in Q , velja $f(P) \neq f(Q)$, saj je f injektivna funkcija. Iz tega sledi $d(P, Q) = PQ = |f(P) - f(Q)| \neq 0$. S tem smo dokazali, da je izpolnjen tudi pogoj (ii) iz definicije metrike.

Da velja tudi pogoj (iv) - trikotniška neenakost, bomo dokazali kasneje (glejte Izrek 53).

Zgled 12 (Koordinatni sistem v evklidski metriki). Naj bo \mathcal{R} kartezična ravnina \mathbb{R}^2 , ki jo opremimo z evklidsko metriko. Kako bi definirali koordinatni sistem $f: p \rightarrow \mathbb{R}$ na nenavpični premici p z enačbo $y = ax + b$? Za poljubni dve točki $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in p$ mora veljati

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (ax_1 + b - ax_2 - b)^2} = \sqrt{1 + a^2} |x_1 - x_2|,$$

torej koordinatni sistem $f: p \rightarrow \mathbb{R}$ lahko definiramo s $f(x, y) = x\sqrt{1 + a^2}$. Če pa je p navpična premica z enačbo $x = c$, tedaj za poljubni točki $(c, y_1), (c, y_2) \in p$ velja

$$|f(c, y_1) - f(c, y_2)| = \sqrt{(y_1 - y_2)^2} = |y_1 - y_2|,$$

zato koordinatni sistem na premici p lahko podamo s $f(a, y) = y$.

2.2 Vmesnost točk

Vmesnost točk na premici je ena najenostavnejših geometrijskih idej, ki pa se izkaže kot zelo uporabna. Formalno jo uvedemo z naslednjo definicijo.

Definicija. Naj bodo A, B in C tri paroma različne kolinearne točke. Rečemo, da je točka B **med točkama** A in C , če velja $AB + BC = AC$. To zapišemo kot $A * B * C$.



Slika 2.2: Vmesnost točk: $A * B * C$

Posledica 10. Če je $A * B * C$, tedaj velja tudi $C * B * A$.

Dokaz Če za tri kolinearne točke A, B in C velja $AB + BC = AC$, tedaj sledi tudi $CB + BA = CA$. \square

Tudi pri realnih številih poznamo pojem vmesnosti. Za tri paroma različna realna števila x , y in z rečemo, da je y med x in z , če velja bodisi $x < y < z$ bodisi $z < y < x$.

Lema 11. Imejmo premico p s koordinatnim sistemom f . Naj bodo A , B in C paroma različne točke na premici p , ki imajo zaporedoma koordinate x , y in z . Če je število y med x in z , tedaj je $A * B * C$.

Dokaz Denimo najprej, da velja $x < y < z$. Tedaj lahko zapišemo $AB = |x - y| = y - x$, $BC = |y - z| = z - y$ in $AC = |x - z| = z - x$. Iz tega sledi $AB + BC = (y - x) + (z - y) = z - x = AC$, torej je $A * B * C$.

Denimo sedaj še, da je $z < y < x$, torej lahko zapišemo $AB = x - y$, $BC = y - z$ in $AC = x - z$ oziroma $AB + BC = AC$, iz česar spet sledi $A * B * C$. \square

Izrek 12. Za poljubne tri paroma različne točke, ki ležijo na premici p , je natanko ena od teh treh točk med preostalima dvema točkama.

Dokaz Naj bodo A , B in C paroma različne točke, ki ležijo na premici p . Po aksiomu **A1** obstaja koordinatni sistem f za premico p . Označimo z x , y in z zaporedoma koordinate točk A , B in C . Eno izmed števil x , y in z je med preostalima dvema. Po Lemi 11 sledi, da je točka s to koordinato med preostalima dvema točkama.

Dokazati je potrebno še, da vselej velja natanko ena od vmesnosti $A * B * C$, $B * A * C$ in $A * C * B$. Denimo, da bi hkrati veljali vmesnosti $A * B * C$ in $B * A * C$. To bi pomenilo $BA + AC = BC$ in hkrati $AB + BC = AC$, iz česar sledi $BA + AC + AB + BC = BC + AC$ oziroma $2AB = 0$, torej $AB = 0$. Dobimo protislovje, saj $A \neq B$. Na enak način dokažemo, da ne moreta hkrati veljati vmesnosti $A * B * C$ in $A * C * B$ oz. $A * C * B$ in $B * A * C$. \square

Denimo sedaj, da so A , B , C in D štiri točke na premici p . Zapis $A * B * C * D$ pomeni, da za poljubno trojico točk izmed danih štirih točk veljajo natanko naslednje vmesnosti: $A * B * C$, $A * B * D$, $A * C * D$, $B * C * D$, $C * B * A$, $D * B * A$, $D * C * A$ in $D * C * B$.

Trditev 13. Poljubne štiri paroma različne kolinearne točke lahko označimo z A , B , C in D tako, da velja $A * B * C * D$.

Dokaz Naj bo p premica, ki vsebuje paroma različne točke P , Q , R in S . Naj bo f koordinatni sistem za premico p . Koordinate točk P , Q , R in S so neka števila, ki jih označimo z w , x , y in z (ne nujno v tem vrstnem redu), tako da velja $w < x < y < z$. Naj bo $A = f^{-1}(w)$, $B = f^{-1}(x)$, $C = f^{-1}(y)$ in $D = f^{-1}(z)$. Po Lemi 11 iz dvojnih neenakosti $w < x < y$, $w < x < z$, $w < y < z$, $x < y < z$ sledijo vmesnosti $A * B * C$, $A * B * D$, $A * C * D$, $B * C * D$, $C * B * A$, $D * B * A$, $D * C * A$ in $D * C * B$. Torej velja ustrezna relacija vmesnosti za vsako trojico izmed štirih točk, po Izreku 12 pa se vsaka od treh točk v dani trojici pojavi le v eni relaciji vmesnosti. Torej zares velja $A * B * C * D$. \square

Izrek 14. Če sta A in B poljubni dve točki, tedaj

1. obstaja točka C , tako da je $A * B * C$,

2. obstaja točka D , tako da je $A * D * B$.

Dokaz Naj bo f koordinatni sistem za premico \overleftrightarrow{AB} , ki vsebuje točki A in B . Označimo $x = f(A)$ in $y = f(B)$. Koordinatni sistem f lahko po potrebi zamenjamo z $-f$ in brez škode za splošnost predpostavimo, da velja $x < y$.

Definiramo $C = f^{-1}(y + 1)$ in $D = f^{-1}\left(\frac{x+y}{2}\right)$. Ker je $x < y < y + 1$, po Lemi 11 sledi $A * B * C$. Iz enakosti $x < y$ sledi

$$2x < x + y < 2y$$

in posledično $x < \frac{x+y}{2} < y$. Torej po Lemi 11 velja $A * D * B$. □

2.3 Daljica, poltrak, kot in trikotnik

Definicija. Naj bosta A in B različni točki. **Daljica** s krajiščema A in B je definirana kot množica

$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{T \mid A * T * B\}.$$

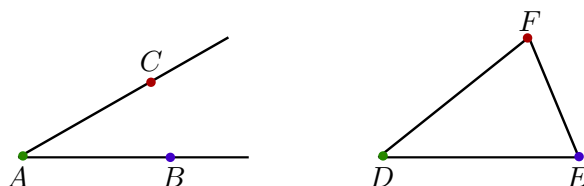
Poltrak \overrightarrow{CD} s krajiščem v C , ki poteka skozi točko D , je množica vseh točk T na premici \overleftrightarrow{CD} , za katere C ni med točkama T in D .



Slika 2.3: Daljica \overline{AB} (levo) in poltrak s krajiščem v C (desno)

Definicija. **Kot** je unija dveh poltrakov z istim krajiščem, ki nista vsebovana v skupni premici. Če je kot unija poltrakov \overrightarrow{AB} in \overrightarrow{AC} , ta poltraka imenujemo **kraka** kota, točko A imenujemo **vrh** kota, kot pa označimo z $\angle BAC$.

Opomba 13. V zgornji definiciji kraka kota nastopata v poljubnem vrstnem redu, vselej torej velja $\angle BAC = \angle CAB$.



Slika 2.4: Kot $\angle BAC$ (levo) in trikotnik $\triangle DEF$ (desno)

Definicija. Naj bodo A , B in C tri nekolinearne točke. **Trikotnik** $\triangle ABC$ je množica

$$\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}.$$

Daljice \overline{AB} , \overline{BC} in \overline{CA} imenujemo **stranice** trikotnika, točke A , B in C pa so **oglišča** trikotnika. Koti $\angle CAB$, $\angle ABC$ in $\angle BCA$ so **notranji koti** trikotnika.

Lema 15. Za poljubni dve različni točki A in B obstaja koordinatni sistem $f: \overleftrightarrow{AB} \rightarrow \mathbb{R}$, tako da velja $\overrightarrow{AB} = \{T \in \overleftrightarrow{AB} \mid f(T) \geq 0\}$.

Dokaz Po posledici 8 (Umeritev premice) obstaja koordinatni sistem $f: \overleftrightarrow{AB} \rightarrow \mathbb{R}$, za katerega je $f(A) = 0$ in $f(B) > 0$. Naj bo $T \in \overleftrightarrow{AB}$ poljubna točka. Tedaj po definiciji poltraka in izreku 12 velja bodisi $T \in \{A, B\}$ bodisi $A * T * B$ bodisi $A * B * T$. Če je $T \in \{A, B\}$, je seveda $f(T) \geq 0$.

Če velja $A * T * B$, to pomeni $AT + TB = AB$ oziroma $|f(T)| + |f(T) - f(B)| = |f(T)| + f(B) - f(T) = f(B)$ in sledi $f(T) > 0$.

Denimo nazadnje še, da je $A * B * T$. Iz tega sledi $AB + BT = AT$ oziroma $f(B) + |f(B) - f(T)| = f(B) + f(T) - f(B) = |f(T)|$ in spet dobimo, da je $f(T) > 0$. \square

Trditev 16. (i) Za poljubni dve različni točki A in B je $\overline{AB} = \overline{BA}$.

(ii) Krajišči daljice sta enolično določeni: če je $\overline{AB} = \overline{CD}$, potem velja $\{A, B\} = \{C, D\}$.

(iii) Za poljubno točko $C \in \overleftrightarrow{AB} \setminus \{A\}$ velja $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

(iv) Za poljubni točki $B_1 \in \overleftrightarrow{AB} \setminus \{A\}$ in $C_1 \in \overleftrightarrow{AC} \setminus \{A\}$ velja $\angle BAC = \angle B_1AC_1$.

(v) Množica oglišč trikotnika je enolično določena: če velja $\triangle ABC = \triangle DEF$, tedaj je $\{A, B, C\} = \{D, E, F\}$.

Dokaz (i) Po posledici 10 je $\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{T \mid A * T * B\} = \{B, A\} \cup \{T \mid B * T * A\} = \overline{BA}$.

(ii) Naj velja $\overline{AB} = \overline{CD}$. Denimo, da $\{A, B\} \neq \{C, D\}$; torej vsaj eno od krajišč A, B, C, D ni krajišče "druge" daljice. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da $D \notin \{A, B\}$. Torej velja $A * D * B$ oziroma $AD + DB = AB$. Ker $D \neq A$ in $D \neq B$, je $AD > 0, DB > 0$ in posledično $AD < AB$ ter $DB < AB$. Ker je $CD = AB$, oglišče C ni enako A niti B , torej je tudi $A * C * B$ in $AC + CB = AB$. Iz tega sklepamo, da je $AC < AB$ in $CB < AB$. Ker točki C in D ležita med točkama A in B , velja bodisi $A * C * D * B$ bodisi $A * D * C * B$. V prvem primeru iz $A * C * D$ dobimo $AC + CD = AD$ in sledi $CD < AD < AB$, kar je v protislovju z enakostjo $AB = CD$. V drugem primeru pa iz $A * D * C$ dobimo $AD + DC = AC$ in sledi $CD < AC < AB$, kar je spet v protislovju z enakostjo $AB = CD$. Torej je $\{A, B\} = \{C, D\}$.

(iii) Naj bo $C \in \overleftrightarrow{AB} \setminus \{A\}$. Tedaj velja $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$. Po lemi 15 obstaja koordinatni sistem $f: \overleftrightarrow{AB} \rightarrow \mathbb{R}$, za katerega velja $\overrightarrow{AB} = \{T \in \overleftrightarrow{AB} \mid f(T) \geq 0\}$. Za poljubno točko $U \in \overleftrightarrow{AB} \setminus \overrightarrow{AB}$ velja $f(U) < 0$ in posledično $UA + AC = -f(U) + f(C) = |f(C) - f(U)| = UC$, torej je $U * A * C$ in tako $U \in \overleftrightarrow{AC} \setminus \overrightarrow{AC}$. Iz tega sledi vsebovanost $\overrightarrow{AC} \subseteq \overrightarrow{AB}$. Velja tudi $B \in \overleftrightarrow{AC} \setminus \{A\}$ in z analognim sklepanjem kot zgoraj lahko dokažemo, da je $\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{AC}$.

(iv) Naj bo $B_1 \in \overleftrightarrow{AB} \setminus \{A\}$ in $C_1 \in \overleftrightarrow{AC} \setminus \{A\}$. Potem po (iii) velja $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC}$, iz česar sledi $\angle B_1AC_1 = \angle BAC$.

(v) Naj velja $\Delta ABC = \Delta DEF$ in denimo, da $\{A, B, C\} \neq \{D, E, F\}$. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da $D \notin \{A, B, C\}$ in ker $D \in \Delta ABC$, D leži med dvema izmed oglišč A , B in C . BŠS privzemimo, da velja $A * D * B$. Ker so točke D , E in F nekolinearne, vsaj ena od E in F ne leži na premici \overleftrightarrow{AB} .

Denimo najprej, da niti E niti F ne ležita na premici \overleftrightarrow{AB} . Tedaj sta premici \overleftrightarrow{DE} in \overleftrightarrow{DF} obe različni od premice \overleftrightarrow{AB} in jo po izreku 1 sekata le v točki D . Po istem izreku tudi premica \overleftrightarrow{EF} seka premico \overleftrightarrow{AB} kvečjemu v eni točki, kar pomeni, da ima presek $\overleftrightarrow{AB} \cap \Delta DEF$ največ dve točki. To pa je v protislovju s predpostavko, da je $\overleftrightarrow{AB} \subset \Delta DEF$ in da daljica \overleftrightarrow{AB} vsebuje neskončno mnogo točk (saj je po aksiomu ravnila ekvipolentna intervalu $[f(A), f(B)] \subset \mathbb{R}$, kjer je f poljuben koordinatni sistem za premico \overleftrightarrow{AB}).

Denimo sedaj še, da le ena od točk E in F (npr. E) leži na premici \overleftrightarrow{AB} . Tedaj premica \overleftrightarrow{EF} lahko sovpada kvečjemu z eno izmed premic \overleftrightarrow{BC} in \overleftrightarrow{CA} . Torej je nosilka ene od stranic trikotnika ΔABC (brez škode za splošnost predpostavimo, da je to nosilka stranice \overleftrightarrow{AC}) različna od vseh treh premic \overleftrightarrow{DE} , \overleftrightarrow{DF} in \overleftrightarrow{EF} in po izreku 1 vsako od njih seka kvečjemu v eni točki. To pomeni, da presek $\overleftrightarrow{AC} \cap \Delta DEF$ vsebuje največ tri različne točke. Ker pa je $\overleftrightarrow{AC} \subset \Delta DEF$, dobimo protislovje, saj vsaka daljica vsebuje neskončno mnogo točk. S tem smo dokazali, da velja $\{A, B, C\} = \{D, E, F\}$. \square

2.4 Skladnost daljic

Definicija. Daljici \overleftrightarrow{AB} in \overleftrightarrow{CD} sta **skladni**, če velja $AB = CD$. V tem primeru skladnost daljic označimo z $\overleftrightarrow{AB} \cong \overleftrightarrow{CD}$.

Lema 17. Relacija skladnosti je ekvivalenčna relacija na množici vseh daljic.

Naslednji izrek nam pove, da lahko na danem poltraku vselej “odmerimo” daljico izbrane dolžine, ki je enolično določena.

Izrek 18 (Konstrukcija daljic). Za poljubno daljico \overleftrightarrow{AB} in poltrak \overleftrightarrow{CD} obstaja natanko ena točka $E \in \overleftrightarrow{CD}$, za katero velja $\overleftrightarrow{AB} \cong \overleftrightarrow{CE}$.

Dokaz Po umeritvi premice (Posledica 8) obstaja koordinatni sistem $f: \overleftrightarrow{CD} \rightarrow \mathbb{R}$, za katerega velja $f(C) = 0$ in $f(D) > 0$. Tedaj je koordinata točke D enaka $f(D) = CD$. Če je E poljubna točka na poltraku \overleftrightarrow{CD} , potem velja $\overleftrightarrow{CE} \cong \overleftrightarrow{AB}$ natanko tedaj, ko je $f(E) = AB$. Torej je $\overleftrightarrow{CE} \cong \overleftrightarrow{AB}$ natanko tedaj, ko je $E = f^{-1}(AB)$. Točka $f^{-1}(AB)$ je enolično določena, ker je f bijektivna funkcija. \square

Če za tri točke A , B in C velja $A * B * C$ in $\overleftrightarrow{AB} \cong \overleftrightarrow{BC}$, tedaj točko B imenujemo **razpolovišče** daljice \overleftrightarrow{AC} . Naslednja trditev pove, da je razpolovišče enolično določena točka daljice.

Trditev 19. Vsaka daljica ima natanko eno razpolovišče.

Dokaz Naj bo \overline{AC} poljubna daljica. Po umeritvi premice (Posledica 8) lahko izberemo koordinatni sistem f za premico \overline{AC} , za katerega velja $f(A) = 0$ in $f(C) > 0$.

Za poljubno točko B med A in C označimo z x koordinato točke B . Tedaj po aksiomu ravnila **A1** velja $AB = |f(A) - f(B)| = |0 - x| = x$ in $BC = |f(B) - f(C)| = |x - AC| = AC - x$. Če je torej $A * B * C$, velja $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ natanko tedaj, ko je $x = AC - x$ oziroma $x = \frac{AC}{2}$. Ker je $\frac{AC}{2}$ natanko določeno število, je tudi njegova praslika $f^{-1}(\frac{AC}{2}) = B$ enolično določena. \square

2.5 Separacija ravnine

Definicija. Podmnožica ravnine $M \subset \mathcal{R}$ je **konveksna**, če za poljubni točki $A, B \in M$ velja, da je celotna daljica \overline{AB} vsebovana v množici M .

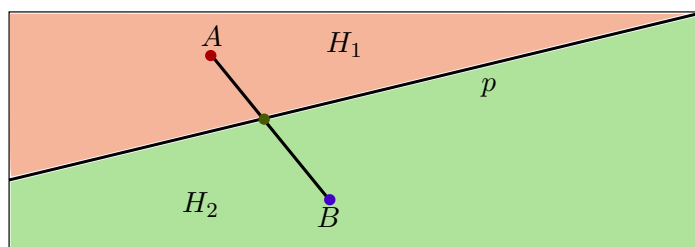
Trditev 20. Če sta M_1 in M_2 poljubni konveksni podmnožici ravnine, je tudi njun presek konveksna množica.

Dokaz Izberimo poljubni točki $A, B \in M_1 \cap M_2$. Ker sta A in B vsebovani v konveksni množici M_1 , je tudi daljica \overline{AB} podmnožica množice M_1 . Ker sta A in B vsebovani v konveksni množici M_2 , je tudi $\overline{AB} \subseteq M_2$. Torej velja $\overline{AB} \subset M_1 \cap M_2$. S tem smo dokazali, da je $M_1 \cap M_2$ konveksna množica. \square

A2 (Aksiom o separaciji ravnine) Za poljubno premico p točke, ki ne ležijo na p , sestavljajo dve disjunktni množici H_1 in H_2 , za kateri velja:

- (i) H_1 in H_2 sta konveksni množici,
- (ii) če je $A \in H_1$ in $B \in H_2$, potem daljica \overline{AB} seka premico p .

Množici H_1 in H_2 v zgornjem aksiomu imenujemo **polravnini, omejeni s premico** p . Če točki A in B ležita v isti polravnini, omejeni s premico p , rečemo tudi, da ležita na isti strani ali pa na istem bregu premice p .



Slika 2.5: Separacija ravnine

Izrek 21 (Paschev postulat). Naj bo $\triangle ABC$ poljuben trikotnik. Če premica p vsebuje točko E , za katero velja $A * E * C$, tedaj p seka daljico \overline{AB} ali pa seka daljico \overline{BC} .

Dokaz Uporabimo dokaz s protislovjem. Denimo, da premica p ne seka niti daljice \overline{AB} niti daljice \overline{BC} . Iz tega po aksiomu **A2** sledi, da točki A in B ležita na isti strani premice p , prav tako pa tudi točki B in C ležita na isti strani premice p . To pomeni, da točki A in C ležita na isti strani premice p in zaradi konveksnosti polravnine sledi, da je celotna daljica \overline{AC} vsebovana v eni polravnini, omejeni s premico p . Ker pa premica p seka daljico \overline{AC} v točki E , dobimo protislovje. \square

Trditvev 22. Naj bo p poljubna premica in \overrightarrow{AB} poltrak, katerega krajišče A leži na premici p , točka B pa ne leži na p . Tedaj je množica $\overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$ vsebovana v eni polravnini, omejeni s premico p .

Dokaz Denimo, da poltrak \overrightarrow{AB} vsebuje točko C , tako da točki B in C ležita v različnih polravninah, omejenih s premico p . Tedaj premica p po aksiomu **A2** seka daljico \overline{BC} v neki točki. Ker sta \overrightarrow{AB} in p dve različni premici, se sekata v eni sami točki A . Iz tega sledi, da premica p seka daljico \overline{BC} v točki A in potemtakem velja $C * A * B$. Toda po definiciji poltraka je poltrak \overrightarrow{AB} množica točk T na premici \overleftarrow{AB} , za katere **ne** velja $T * A * B$. Dobimo protislovje, torej vse točke poltraka \overrightarrow{AB} , razen krajišča, ležijo v isti polravnini, omejeni s premico p . \square

Posledica 23. Naj bo p poljubna premica, $A \in p$ in $B \notin p$. Tedaj vse točke množice $\overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$ ležijo v eni polravnini, omejeni s premico p .

Dokaz To sledi neposredno iz Trditve 22, saj velja $\overrightarrow{AB} \setminus \{A\} \subseteq \overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$.

Trditvev 24. Naj bo p poljubna premica ter H_1 in H_2 polravnini, omejeni s premico p . Tedaj velja:

- (i) H_1 in H_2 sta neprazni množici,
- (ii) $H_1 \cup p$ je konveksna množica,
- (iii) H_1 vsebuje vsaj tri nekolinearne točke.

Dokaz (i) Po aksiomu **I-3** ravnina vsebuje tri točke A , B in C , ki ne ležijo na isti premici. Torej vsaj ena izmed točk A , B , C ne leži na premici p in posledično leži v eni od polravnin H_1 in H_2 . Brez škode za splošnost predpostavimo, da točka A leži v polravnini H_1 . Naj bo T neka točka na premici p (ta obstaja po aksiomu **I-2**). Po Izreku 14 obstaja točka D , tako da je $A * T * D$. Premici p in \overrightarrow{AD} sta različni (saj točka A ne leži na premici p), zato se po izreku 1 sekata le v točki T . Ker daljica \overline{AD} seka premico p , sta točki A in D vsebovani v različnih polravninah, omejenih s p . Torej D leži v polravnini H_2 . S tem smo dokazali, da sta H_1 in H_2 neprazni množici.

- (ii) Naj bosta A in B poljubni točki unije $H_1 \cup p$. Uporabimo analizo primerov.
1.možnost: Če točki A in B ležita v polravnini H_1 , tedaj zaradi konveksnosti polravnine (aksiom **A2**) tudi celotna daljica \overline{AB} leži znotraj H_1 in posledično $\overline{AB} \subseteq H_1 \cup p$.

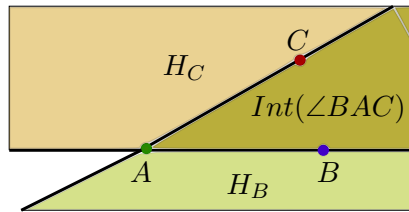
2.možnost: Če točki A in B ležita na premici p , tedaj po definiciji daljice velja $\overline{AB} \subseteq p$ in posledično $\overline{AB} \subseteq H_1 \cup p$.

3.možnost: Če $A \in H_1$ in $B \in p$, tedaj po Posledici 23 sledi, da je množica $\overline{BA} \setminus \{B\}$ vsebovana v polravnini H_1 . Iz tega sledi, da je tudi $\overline{AB} \subseteq H_1 \cup p$.

4.možnost: Če $A \in p$ in $B \in H_1$, je dokaz povsem podoben kot pri 3. možnosti.

- (iii) Pri (i) smo že dokazali, da polravnina H_1 vsebuje vsaj eno točko A . Po aksiomu **I-2** premica p vsebuje vsaj dve različni točki B in C . Po Izreku 14 obstaja točka D , za katero velja $A * D * B$, ter točka E , za katero velja $A * E * C$. Po Posledici 23 velja $\overline{BA} \setminus B \subseteq H_1$ in $\overline{CA} \setminus C \subseteq H_1$, zato sta točki D in E vsebovani v polravnini H_1 . Dokažimo še, da so točke A , D in E nekolinearne. Če bi obstajala premica q , ki bi vsebovala točke A , D in E , bi po aksiomu **I-1** sledilo $q = \overleftrightarrow{AD} = \overleftrightarrow{AE}$ in bi premica q posledično vsebovala tudi točki B in C , to pa bi spet po aksiomu **I-1** pomenilo, da je $q = p$, kar je v nasprotju z dejstvom, da $A \notin p$. Torej polravnina H_1 res vsebuje tri nekolinearne točke A , D in E . \square

Definicija. Notranjost kota $\angle BAC$ je presek polravnine H_C , ki je omejena s premico \overleftrightarrow{AB} in vsebuje točko C , ter polravnine H_B , ki je omejena s premico \overleftrightarrow{AC} in vsebuje točko B . Notranjost kota $\angle BAC$ označimo z $Int(\angle BAC)$.



Slika 2.6: Notranjost kota

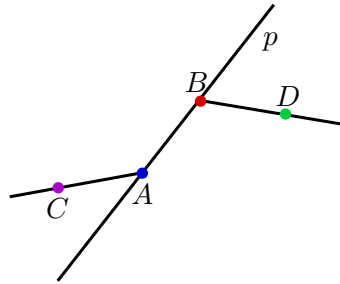
Točka D torej leži v notranjosti kota $\angle BAC$ natanko tedaj, ko točki B in D ležita na isti strani premice \overleftrightarrow{AC} ter D in C ležita na isti strani premice \overleftrightarrow{AB} . Iz trditve 22 sledi, da je notranjost kota dobro definirana (neodvisna od izbire točk B in C). **Zunanost kota** $\angle BAC$ je množica $\mathcal{R} \setminus (\angle BAC \cup Int(\angle BAC))$.

Trditev 25. Če točka D leži v notranjosti kota $\angle BAC$, tedaj velja $\overline{AD} \setminus \{A\} \subseteq Int(\angle BAC)$.

Dokaz Ker $D \in Int(\angle BAC)$, točki D in B (po definiciji notranjosti kota) ležita na isti strani premice \overleftrightarrow{AC} . Po Trditvi 22 množica $\overline{AD} \setminus \{A\}$ leži na isti strani premice \overleftrightarrow{AC} kot točka B .

Ker $D \in Int(\angle BAC)$, točki D in C ležita na isti strani premice \overleftrightarrow{AB} . Po Trditvi 22 množica $\overline{AD} \setminus \{A\}$ leži na isti strani premice \overleftrightarrow{AB} kot točka C .

Torej sledi $\overline{AD} \setminus \{A\} \subseteq Int(\angle BAC)$. \square



Slika 2.7: Z-izrek

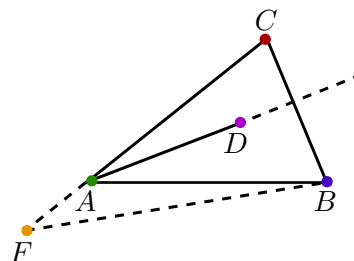
Izrek 26 (Z-izrek). Naj bo p poljubna premica, ki vsebuje dve različni točki A in B . Naj bosta C in D točki, ki ležita na različnih bregovih premice p . Tedaj se poltraka \overrightarrow{AC} in \overrightarrow{BD} ne sekata.

Dokaz Po Trditvi 22 množica $\overrightarrow{AC} \setminus \{A\}$ leži na istem bregu premice p kot točka C . Po Trditvi 22 množica $\overrightarrow{BD} \setminus \{B\}$ leži na istem bregu premice p kot točka D . Torej se množici $\overrightarrow{AC} \setminus \{A\}$ in $\overrightarrow{BD} \setminus \{B\}$ ne sekata. Torej se poltraka \overrightarrow{AC} in \overrightarrow{BD} lahko sekata kvečjemu v točki A ali B , to pa ni mogoče, saj $A \notin \overrightarrow{BD}$ in $B \notin \overrightarrow{AC}$. \square

Naslednja trditev je močnejša verzija Paschevega postulata.

Trditev 27. V trikotniku $\triangle ABC$ naj bo E točka, za katero velja $A * E * C$. Naj bo D točka, ki leži na istem bregu premice \overleftrightarrow{AC} kot točka B . Tedaj poltrak \overrightarrow{ED} seka vsaj eno izmed stranic \overline{AB} in \overline{BC} .

Dokaz Po Izreku 14 obstaja točka G , za katero velja $G * E * D$. Točki G in D ležita na različnih bregovih premice \overleftrightarrow{AC} , torej tudi točki G in B ležita na različnih bregovih te premice. Premica \overleftrightarrow{ED} je unija poltrakov $\overleftrightarrow{ED} = \overrightarrow{ED} \cup \overrightarrow{EG}$. Po Z-izreku se poltraka \overrightarrow{EG} in \overrightarrow{AB} ne sekata. Po istem izreku lahko sklepamo tudi, da se poltraka \overrightarrow{EG} in \overrightarrow{CB} ne sekata. Po Paschevem postulatu (Izrek 21) premica \overleftrightarrow{ED} seka vsaj eno izmed daljic \overline{AB} in \overline{BC} . Ker poltrak \overrightarrow{EG} ne seka nobene od njiju, poltrak \overrightarrow{ED} seka vsaj eno od stranic \overline{AB} in \overline{BC} . \square



Slika 2.8: Izrek o prečki

Izrek 28 (Izrek o prečki). Če točka D leži v notranjosti kota $\angle BAC$, tedaj poltrak \overrightarrow{AD} seka daljico \overline{BC} v neki točki med B in C .

Dokaz Po Izreku 14 obstaja točka F , za katero velja $F * A * C$. Tedaj je $\overleftarrow{FC} = \overleftarrow{AC}$, točki F in C pa ležita na nasprotnih bregovih premice \overleftrightarrow{AB} .

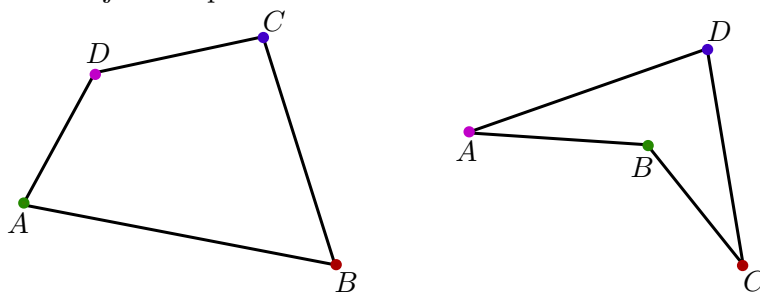
Ker točka D leži v notranjosti kota $\angle BAC$, točki B in D ležita na isti strani premice $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{FC}$. Po trditvi 27 poltrak \overrightarrow{AD} seka (vsaj) eno od daljic \overline{FB} in \overline{BC} .

Ker točki F in C ležita na različnih bregovih premice \overleftrightarrow{AB} , točki C in D pa ležita na istem bregu, tudi točki F in D ležita na različnih bregovih premice \overleftrightarrow{AB} . Po Z-izreku se poltraka \overrightarrow{BF} in \overrightarrow{AD} ne sekata. Torej poltrak \overrightarrow{AD} seka daljico \overline{BC} v točki E , ki je različna od B . Če bi veljalo $E = C$, bi iz tega sledilo, da so točke A , D in C kolinearne in pridemo v protislovje. Torej velja $B * E * C$. \square

2.6 Konveksni štirikotniki

Imejmo štiri točke $A, B, C, D \in \mathcal{R}$, od katerih nobene tri niso kolinearne. V primeru, če se daljice \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} in \overline{DA} paroma sekajo le v skupnih krajiščih, njihovo unijo imenujemo **štirikotnik** in jo označimo s $\square ABCD$. Kote $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ in $\angle CDA$ imenujemo **notranji koti** štirikotnika $\square ABCD$. Daljice \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} in \overline{DA} imenujemo **stranice** štirikotnika $\square ABCD$. Dve stranici s skupnim ogliščem imenujemo **sosejni** stranici, dve stranici, ki nista sosednji, pa imenujemo **nasprotni** stranici štirikotnika. Dva notranja kota imenujemo **sosejna**, če njun presek vsebuje stranico štirikotnika, dva notranja kota, ki nista sosednja, pa imenujemo **nasprotna** notranja kota štirikotnika. Daljici \overline{AC} in \overline{BD} imenujemo **diagonali** štirikotnika.

Premico, ki vsebuje daljico \overline{AB} , imenujemo **nosilka daljice** \overline{AB} . Štirikotnik imenujemo **konveksni štirikotnik**, če je vsaka od njegovih stranic vsebovana v eni od polravnin, ki ju omejuje nosilka njene nasprotne stranice.



Slika 2.9: Konveksni štirikotnik (levo) in nekonveksni štirikotnik (desno)

Trditev 29. Diagonali konveksnega štirikotnika se vselej sekata.

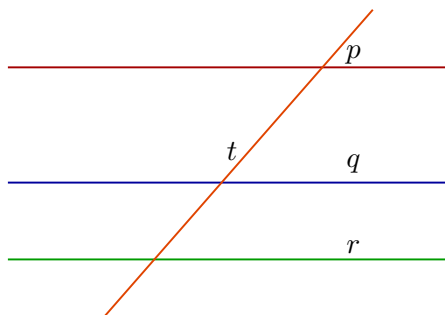
Dokaz Imejmo konveksni štirikotnik $\square ABCD$. Po definiciji konveksnega štirikotnika oglišči A in B ležita na istem bregu premice \overleftrightarrow{DC} , oglišči B in C pa ležita na istem bregu premice \overleftrightarrow{AD} . Iz tega sledi, da točka B leži v notranjosti kota $\angle ADC$ in po izreku o prečki (Izrek 28) poltrak \overrightarrow{DB} seka diagonalo \overline{AC} v neki točki P .

Na podoben način dokažemo, da oglišče A leži v notranjosti kota $\angle BCD$. Po izreku o prečki sledi, da poltrak \overrightarrow{CA} seka diagonalo \overline{BD} v neki točki Q . Ker je $\overrightarrow{CA} \subseteq \overrightarrow{AC}$ in $\overline{DB} \subseteq \overline{BD}$, se premici \overrightarrow{AC} in \overline{BD} sekata v točki P in obenem v točki Q , zato po Izreku 1 sledi, da je $P = Q$. Ker $P \in \overline{AC}$ in $Q \in \overline{BD}$, se torej diagonali \overline{AC} in \overline{BD} sekata v točki P . \square

2.7 Sedem mostov Königsberga

Pojem vmesnosti in aksiom o separaciji ravnine spadata med geometrijske ideje, ki so jih matematiki natančno obravnavali zelo pozno (še pred dobrimi sto leti). Evklid je v svojem študiju geometrije tako vmesnost točk kot tudi separacijo ravnine privzel kot dana, ne da bi se tega zavedal. Temelje geometrije so ponovno začeli raziskovati šele v devetnajstem stoletju, ko so odkrili obstoj neevklidskih geometrij. Za ponazoritev si oglejmo naslednji izrek:

Izrek 30. Naj bodo p , q in r tri premice, izmed katerih se nobeni dve ne sekata. Tedaj obstaja premica t , ki hkrati seka p , q in r .

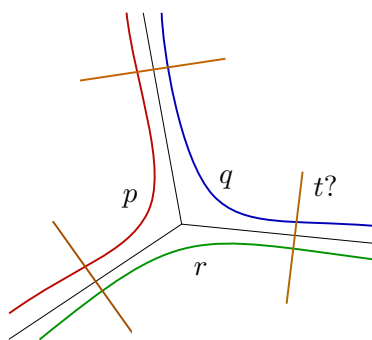


Slika 2.10: Slika k izreku 30

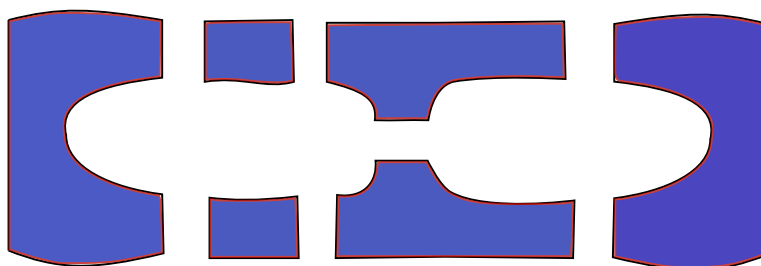
Slika opisane situacije je precej prepričljiva. Izkaže pa se, da izrek 30 velja le v primeru, če predpostavimo veljavnost evklidskega aksioma o vzporednici, medtem ko v neevklidski geometriji ni veljaven.

V neevklidski geometriji lahko premice izgledajo tako, kot kaže Slika 2.11. V tej situaciji vsak par premic leži na istem bregu tretje premice, tako da nobena premica t ne more obenem sekati vseh treh premic p , q in r .

Problem separacije so prvič natančneje raziskovali v osemnajstem stoletju v mestu Königsberg, ki se nahaja na obali Baltiškega morja ob reki Pregel. Na reki sta dva otoka, ki sta s koptim in med seboj povezana preko sedmih mostov, glejte sliko 2.12. Ob sprehajanju po teh otokih so domačini opazili, da v primeru, ko so svoj sprehod začeli na južnem bregu reke, sprehoda niso mogli izvesti tako, da bi vsakega od mostov prečili natanko enkrat. Ljudem se je sicer zdelo, da je tak sprehod nemogoč, nihče pa ni bil o tem prepričan. Nazadnje je leta 1735 za problem izvedel veliki švicarski matematik Leonhard Euler, ki ga je analiziral takole.



Slika 2.11: Premice v hiperbolični geometriji



Slika 2.12: Sedem mostov Königsberga

Denimo, da bi obstajal sprehod, ob katerem začnemo na južnem bregu reke in vsak most prehodimo natanko enkrat. Najprej si oglejmo vzhodni otok, do katerega vodijo trije mostovi. Ker sprehod začnemo na južnem bregu reke, ga zagotovo nismo začeli na vzhodnem otoku. Ker vsakega od treh mostov prehodimo natanko enkrat, bomo sprehod končali *na* vzhodnem otoku (podoben razmislek nam pove, da če smo začeli z ugasnjeno lučjo in trikrat pritisnili stikalo, je luč na koncu prižgana).

Oglejmo si še zahodni otok, do katerega vodi pet mostov. Ker sprehoda nismo začeli na otoku in je 5 liho število, bomo sprehod končali *na* zahodnem otoku. Tu pridemo do protislovja, saj sprehoda ne moremo končati na dveh različnih krajih hkrati.

V primeru, da sprehod začnemo na severnem bregu ali na enem izmed otokov, je dokaz povsem podoben. Eulerjeva rešitev tega problema je zgodovinsko zelo pomembna, ker je v tistem trenutku prvič kdorkoli rešil tako vrsto problema. Iz Eulerjeve analize Königsberškega sprehoda se je razvila povsem nova veja matematike, ki se imenuje topologija.

2.8 Merjenje kotov

Spomnimo se, da smo naš aksiomatski sistem geometrije začeli z urejenim parom $(\mathcal{R}, \mathcal{P})$, kjer \mathcal{R} predstavlja ravnino (množico vseh točk), \mathcal{P} pa je družina vseh premic. Kasneje smo tej strukturi dodali še funkcijo razdalje $d: \mathcal{R} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in dobili trojico $(\mathcal{R}, \mathcal{P}, d)$. Na podlagi razdalj med točkami smo definirali pojem vmesnosti in tudi skladnost daljic. Sedaj

bomo to strukturo še dopolnili z dodatkom mere za velikost kotov, ki jih bomo merili na znani način, v kotnih stopinjah.

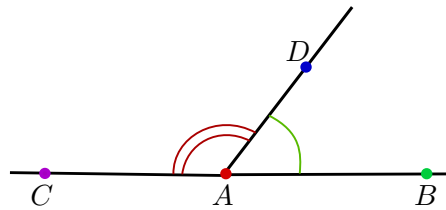
Označimo z \mathcal{A} množico vseh kotov v ravnini \mathcal{R} . Opazovali bomo strukturo $(\mathcal{R}, \mathcal{P}, d, \mu)$, kjer je $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ neka funkcija. Navedimo sedaj aksiom, s katerim vpeljemo merjenje kotov.

A3 (Aksiom o kotomeru) Obstaja funkcija $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$, za katero velja:

1. $0 < \mu(\angle BAC) < 180$ za vsak kot $\angle BAC$
2. (konstrukcija kota) Naj bo H polravnina, omejena s premico \overleftrightarrow{AB} . Za vsako realno število r , kjer je $0 < r < 180$, obstaja natanko en poltrak \overrightarrow{AE} , za katerega velja $E \in H$ in $\mu(\angle BAE) = r$.
3. (vsota kotov) Če točka D leži v notranjosti kota $\angle BAC$, potem velja $\mu(\angle BAC) = \mu(\angle BAD) + \mu(\angle DAC)$.

Število $\mu(\angle BAC)$ imenujemo **velikost kota** $\angle BAC$.

Definicija. Poltraka \overrightarrow{AB} in \overrightarrow{AC} sta **nasprotna**, če velja $B * A * C$. Kota $\angle BAD$ in $\angle DAC$ sta **sokota**, če sta \overrightarrow{AB} in \overrightarrow{AC} nasprotna poltraka. Kota $\angle BAC$ in $\angle DEF$ sta **suplementarna**, če velja $\mu(\angle BAC) + \mu(\angle DEF) = 180$.



Slika 2.13: Sokota

Izrek 31. Poljubna dva sokota sta suplementarna.

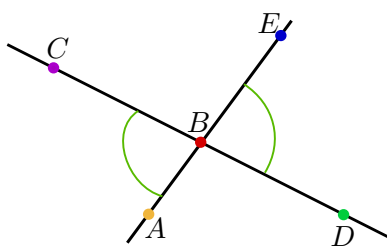
Definicija. Kota $\angle ABC$ in $\angle DEF$ sta **skladna**, če velja $\mu(\angle ABC) = \mu(\angle DEF)$.

Definicija. Kot $\angle ABC$ je **pravi kot**, če velja $\mu(\angle ABC) = 90$. Premici p in m sta **pravokotni**, če obstajajo točke $A \in p$, $B \in p \cap m$ ter $C \in m$, tako da je $\angle ABC$ pravi kot. To označimo s $p \perp m$.

Kot, katerega velikost je manjša od 90, imenujemo **ostri kot**. Kot, katerega velikost je večja od 90, pa imenujemo **topi kot**.

Dva kota $\angle ABC$ in $\angle DBE$ s skupnim vrhom sta **sovršna**, če velja bodisi

- $A * B * E$ in $C * B * D$ in $\overleftrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{BD}$ bodisi
- $A * B * D$ in $C * B * E$ in $\overleftrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{BE}$.



Slika 2.14: Sovršna kota

Trditev 32. Sovršna kota sta skladna.

Dokaz (Vaje) Naj bosta $\angle ABC$ in $\angle DBE$ sovršna kota. Tedaj velja bodisi

(i) $A * B * E$ in $C * B * D$ in $\overleftrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{BD}$ bodisi

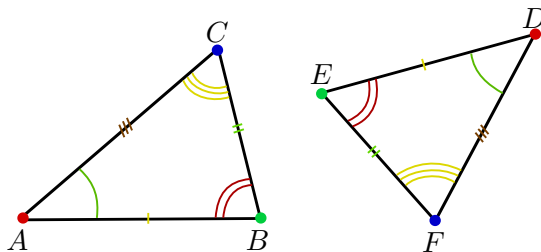
(ii) $A * B * D$ in $C * B * E$ in $\overleftrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{BE}$.

V primeru (i) sledi, da sta poltraka \overrightarrow{BA} in \overrightarrow{BE} nasprotna in poltraka \overrightarrow{BC} in \overrightarrow{BD} nasprotna. Zato sta kota $\angle ABC$ in $\angle EBC$ sokota in kota $\angle EBC$ in $\angle EBD$ sokota. Po izreku 31 velja $\mu(\angle ABC) + \mu(\angle EBC) = \mu(\angle EBC) + \mu(\angle EBD) = 180$, torej je $\angle ABC \cong \angle DBE$.

V primeru (ii) sledi, da sta poltraka \overrightarrow{BA} in \overrightarrow{BD} nasprotna in poltraka \overrightarrow{BC} in \overrightarrow{BE} nasprotna. Zato sta kota $\angle ABC$ in $\angle DBC$ sokota in kota $\angle DBC$ in $\angle DBE$ sokota. Po izreku 31 velja $\mu(\angle ABC) + \mu(\angle DBC) = \mu(\angle DBC) + \mu(\angle DBE) = 180$, torej je $\angle ABC \cong \angle DBE$. \square

2.9 Skladnost trikotnikov

Definicija. Dva trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$ sta **skladna**, če obstaja bijektivna preslikava $f: \{A, B, C\} \rightarrow \{D, E, F\}$, za katero velja $\overline{AB} \cong \overline{f(A)f(B)}$, $\overline{BC} \cong \overline{f(B)f(C)}$, $\overline{AC} \cong \overline{f(A)f(C)}$, $\angle CAB \cong \angle f(C)f(A)f(B)$, $\angle ABC \cong \angle f(A)f(B)f(C)$ in $\angle BCA \cong \angle f(B)f(C)f(A)$.



Slika 2.15: Skladna trikotnika

Skladna trikotnika imata torej paroma skladne vse tri stranice in vse tri notranje kote, pri čemer je pomembno, katere stranice oz. kateri notranji koti so paroma skladni. To

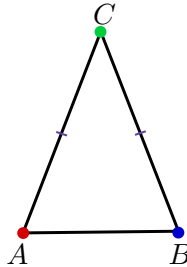
najlažje povemo z določitvijo bijekcije med množicama oglišč v zgornji definiciji. Dogovorimo se, da bomo to bijekcijo implicitno zapisali v oznaki skladnosti dveh trikotnikov. Oznaka

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

naj pomeni, da sta $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$ skladna trikotnika, pri čemer je ustrezna bijekcija med množicama njunih oglišč preslikava $f: \{A, B, C\} \rightarrow \{D, E, F\}$, ki slika $A \mapsto D$, $B \mapsto E$ in $C \mapsto F$.

A4 (Aksiom SKS) Naj bosta $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$ trikotnika, za katera velja $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ in $\overline{BC} \cong \overline{EF}$. Tedaj je $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Trikotnik je **enakokrak**, če ima dve skladni stranici. Skladni stranici enakokrakega trikotnika imenujemo **kraka**, tretjo stranico pa **osnovnica**. Trikotnik je **enakostraničen**, če so vse tri njegove stranice paroma skladne.



Slika 2.16: Enakokraki trikotnik

Izrek 33 (Izrek o enakokrakem trikotniku). Če ima trikotnik dve skladni stranici, tedaj sta notranja kota nasproti teh stranic skladna.

Dokaz Naj bo $\triangle ABC$ trikotnik, za katerega velja $\overline{AC} \cong \overline{BC}$. Trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle BAC$ imata dva para skladnih stranic $\overline{BC} \cong \overline{AC}$ in $\overline{CA} \cong \overline{CB}$ ter skladna vmesna kota, saj gre za isti kot $\angle BCA \cong \angle ACB$. Po aksiomu A4 (SKS) sledi, da je $\triangle ABC \cong \triangle BAC$. Skladna trikotnika imata paroma skladne notranje kote, zato je $\angle ABC \cong \angle BAC$. \square

Posledica 34. Vsi trije notranji koti enakostraničnega trikotnika so skladni.

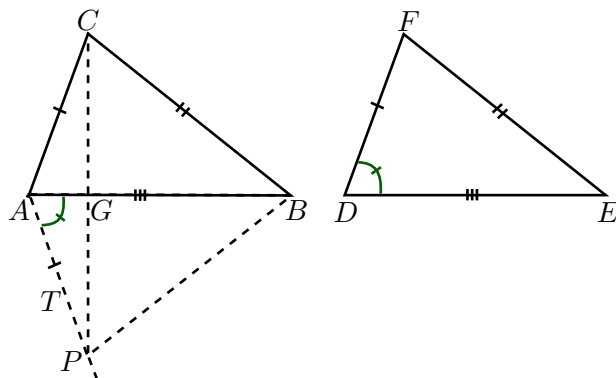
Izrek 35 (Izrek KSK). Naj bosta $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$ trikotnika, za katera velja $\angle CAB \cong \angle FDE$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ in $\angle ABC \cong \angle DEF$. Tedaj je $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Dokaz Po izreku o konstrukciji daljic (Izrek 18) obstaja točka $G \in \overrightarrow{DF}$, za katero velja $\overline{AC} \cong \overline{DG}$. Trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle DEG$ imata paroma skladni stranici $\overline{CA} \cong \overline{GD}$ in $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ter paroma skladna notranja kota $\angle CAB \cong \angle GDE$ med tema stranicama, zato po aksiomu A4 (SKS) velja $\triangle ABC \cong \triangle DEG$. Iz skladnosti trikotnikov sledi, da je $\angle ABC \cong \angle DEG \cong \angle DEF$ in po aksiomu o kotomeru A3 (konstrukcija kota) poltraka \overrightarrow{EG} in \overrightarrow{EF} sovpadata. Ker se premici \overleftrightarrow{EF} in \overleftrightarrow{DF} sekata v natanko eni točki, sledi $F = G$ in torej $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. \square

Izrek 36 (Obrat izreka o enakokrakem trikotniku). Če sta dva notranja kota trikotnika skladna, potem sta tudi stranici nasproti teh notranjih kotov skladni.

Dokaz Naj bo ΔABC trikotnik, v katerem velja $\angle ABC \cong \angle ACB$. Trikotnika ΔABC in ΔACB imata skladna notranja kota $\angle ABC \cong \angle ACB$ in $\angle BCA \cong \angle CBA$ ter skladni stranici $\overline{BC} \cong \overline{CB}$, zato sta skladna po izreku KSK. Iz skladnosti sledi tudi skladnost istoležnih stranic, torej je $\overline{AC} \cong \overline{AB}$. \square

Izrek 37 (Izrek SSS). Če imata dva trikotnika paroma skladne vse tri stranice, potem sta skladna.



Slika 2.17: Skica k dokazu izreka 37

Dokaz Naj bosta ΔABC in ΔDEF trikotnika, za katera velja $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ in $\overline{CA} \cong \overline{FD}$. Naj bo H polravnina, omejena s premico \overleftrightarrow{AB} , v kateri točka C ne leži. Po aksiomu o kotomeru A3 (konstrukcija kota) obstaja natanko en poltrak \overrightarrow{AT} , za katerega velja $T \in H$ in $\mu(\angle BAT) = \mu(\angle EDF)$. Po izreku o konstrukciji daljic (Izrek 18) obstaja natanko ena točka $P \in \overrightarrow{AT}$, za katero je $\overline{AP} \cong \overline{DF}$. Trikotnika ΔABP in ΔDEF imata paroma skladni dve stranici in skladna vmesna kota, zato po aksiomu A4 (SKS) sledi $\Delta ABP \cong \Delta DEF$.

Ker točki C in P ležita v različnih polravninah, omejenih s premico \overleftrightarrow{AB} , daljica \overline{CP} seka premico \overleftrightarrow{AB} v neki točki G . Glede lege točke G obravnavamo več različnih možnosti: (i) $A * G * B$, (ii) $A = G$, (iii) $G * A * B$, (iv) $G = B$ in (v) $A * B * G$. Oglejmo si preostanek dokaza v primeru (i).

Velja $AP = DF = AC$ in $BP = EF = BC$, zato sta trikotnika ΔPCA in ΔPCB enakokraka. Po izreku o enakokrakem trikotniku sledi $\angle PCA \cong \angle CPA$ in $\angle PCB \cong \angle CPB$, iz česar po aksiomu kotomera (vsota kotov) dobimo:

$$\mu(\angle BCA) = \mu(\angle PCA) + \mu(\angle PCB) = \mu(\angle CPA) + \mu(\angle CPB) = \mu(\angle BPA) = \mu(\angle EFD).$$

Trikotnika ΔABC in ΔDEF imata paroma skladne stranice in en par skladnih notranjih kotov med dvema skladnima stranicama, zato sta skladna po aksiomu A4 (SKS). Dokaz v preostalih primerih poskusite dokončati sami.

Simetrala kota $\angle BAC$ je poltrak \overrightarrow{AD} , za katerega velja, da točka D leži v notranjosti kota $\angle BAC$ in da je $\angle BAD \cong \angle DAC$.

Trditev 38. Vsak kot ima natanko eno simetralo.

Dokaz Naj bo $\angle BAC$ poljuben kot. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da velja $AB = AC$ (na krakih kota si namreč vselej lahko izberemo dve točki, ki sta enako oddaljeni od vrha kota). Označimo z D razpolovišče daljice \overline{BC} . Tedaj točka D po Posledici 23 leži v notranjosti kota $\angle BAC$. Po izreku SSS (Izrek 37) velja $\triangle ADC \cong \triangle ADB$, torej je $\angle BAD \cong \angle CAD$. To pomeni, da je poltrak \overrightarrow{AD} simetrala kota $\angle BAC$.

Dokazali smo, da vsak kot premore vsaj eno simetralo, sedaj pa moramo dokazati še, da je ta simetrala le ena. Denimo, da je poleg \overrightarrow{AD} tudi poltrak \overrightarrow{AE} simetrala kota $\angle BAC$. Ker točka E leži v notranjosti kota $\angle BAC$, po izreku o prečki (Izrek 28) sledi, da poltrak \overrightarrow{AE} seka daljico \overline{BC} v neki točki D' , ki leži med B in C . Po aksiomu SKS velja $\triangle AD'B \cong \triangle AD'C$, torej je $\overline{D'B} \cong \overline{D'C}$ in je točka D' razpolovišče daljice \overline{BC} . Ker ima daljica le eno razpolovišče, je $D = D'$. Poltraka \overrightarrow{AD} in \overrightarrow{AE} imata skupno krajišče in oba vsebujeta točko $D = D'$, torej sovpadata: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$. \square

Izrek 39 (Obstoj pravokotnic). Za poljubno premico p in poljubno točko T , ki ne leži na p , obstaja premica q , ki je pravokotna na premico p in vsebuje točko T .

Dokaz Naj bo p premica in $T \notin p$. Izberimo poljubni dve različni točki $A, C \in p$. Po aksiomu o kotomeru A3 (konstrukcija kota) obstaja točka U , ki leži na nasprotni strani premice p kot točka T , in za katero velja $\angle TAC \cong \angle UAC$. Po izreku o konstrukciji daljice (Izrek 18) obstaja natanko ena točka $T' \in \overline{AU}$, za katero velja $\overline{AT} \cong \overline{AT'}$. Ker točki T in T' ležita v različnih polravninah, omejenih s premico p , daljica $\overline{TT'}$ seka premico p v neki točki G . Imamo dve možnosti:

1. možnost: $G \neq A$. V tem primeru po aksiomu SKS sledi $\triangle AGT \cong \triangle AGT'$. Kota $\angle AGT$ in $\angle AGT'$ sta tako skladna in obenem sokota, torej suplementarna. Iz tega sledi, da sta ta kota prava in je $\overleftrightarrow{TG} \perp \overleftrightarrow{AC}$.
2. možnost: $G = A$. V tem primeru je $\angle TGC \cong \angle TAC$ in $\angle T'GC \cong \angle T'AC$. Torej sta kota $\angle TGC$ in $\angle T'GC$ skladna sokota, iz česar podobno kot zgoraj sklepamo, da je $\overleftrightarrow{TG} \perp \overleftrightarrow{AC}$. \square

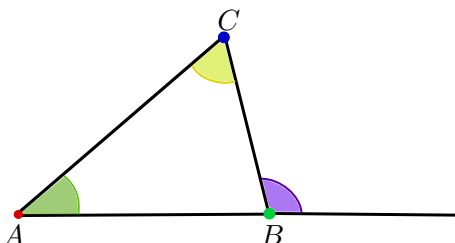
2.10 Geometrijske neenakosti

V našem dosedanjem študiju trikotnikov smo se ukvarjali zgolj z relacijo skladnosti. Naše trditve in izreki so določali, pod katerimi pogoji lahko sklepamo, da sta dve daljici, dva kota ali dva trikotnika skladna. Sedaj si bomo ogledali še relacije neenakosti med daljicami oziroma koti.

Definicija. Če velja $\mu(\angle ABC) < \mu(\angle DEF)$, rečemo, da je kot $\angle ABC$ **manjši od** kota $\angle DEF$, kot $\angle DEF$ pa je **večji od** kota $\angle ABC$. Če velja $AB < DE$, rečemo, da je daljica \overline{AB} **krajša od** daljice \overline{DE} , oziroma, da je daljica \overline{DE} **daljša od** daljice \overline{AB} .

Definicija. Sokot notranjega kota trikotnika imenujemo **zunanji kot** trikotnika, preostala dva notranja kota trikotnika pa imenujemo **nepriležna notranja kota**.

Vsak trikotnik ima šest zunanjih kotov. Vsak notranji kot trikotnika ima dva skladna zunanja kota, ki tvorita par sovršnih kotov.



Slika 2.18: Zunanji kot trikotnika in nepriležna notranja kota

Izrek 40 (Izrek o zunanjem kotu). Zunanji kot trikotnika je večji od obeh nepriležnih notranjih kotov.

Dokaz Naj bo $\triangle ABC$ poljuben trikotnik, ter izberimo točko D , za katero velja $A * B * D$. Dokažimo, da je zunanji kot $\angle CBD$ večji od nepriležnega notranjega kota $\angle ACB$. Označimo z E razpolovišče stranice \overline{BC} . Po izreku o konstrukciji daljic (Izrek 18) obstaja točka F , za katero velja $A * E * F$ in $\overline{EA} \cong \overline{EF}$. Trikotnika $\triangle AEC$ in $\triangle FEB$ imata paroma skladni stranici $\overline{AE} \cong \overline{FE}$ in $\overline{EC} \cong \overline{EB}$ ter skladna notranja kota $\angle AEC \cong \angle FEB$, ki sta sovršna, zato sta skladna po aksiomu SKS. Torej je tudi kot $\angle BCA = \angle ECA$ skladen s kotom $\angle EBF = \angle CBF$. Točka F po Posledici 23 leži v notranjosti kota $\angle CBD$ ($\overline{AF} \setminus \{A\}$ leži v isti polravnini, omejeni s premico \overline{BD} , kot točka C , $\overline{EF} \setminus \{E\}$ pa leži v isti polravnini, omejeni s premico \overline{BC} , kot točka D). Torej po aksiomu o kotomeru velja $\mu(\angle CBF) < \mu(\angle CBD)$, zato je nepriležni notranji kot $\angle BCA$ manjši od zunanjega kota $\angle CBD$. Za ostale pare zunanjih in nepriležnih notranjih kotov je dokaz analogen. \square

Posledica 41. Dana premica ima skozi dano točko, ki ne leži na tej premici, natanko eno pravokotnico.

Dokaz Naj bo p poljubna premica in T točka, ki ne leži na p . Po izreku o obstoju pravokotnic (Izrek 39) obstaja vsaj ena pravokotnica q k premici p skozi točko T . Denimo, da obstaja še ena pravokotnica m k premici p , ki vsebuje točko T in je različna od q . Označimo z A presečišče premic p in q ter z B presečišče premic p in m . Naj bo C točka na premici p , za katero velja $A * B * C$. Torej je kot $\angle TBC$ zunanji kot trikotnika $\triangle TAB$, kot $\angle TAB$ pa je eden od nepriležnih notranjih kotov. Ker sta oba kota prava, z uporabo izreka o zunanjem kotu dobimo protislovje. S tem smo dokazali, da je pravokotnica ena sama. \square

Izrek 42. Naj bo $\triangle ABC$ poljuben trikotnik. Tedaj velja $AB > AC$ natanko tedaj, ko je kot $\angle ACB$ večji od kota $\angle ABC$.

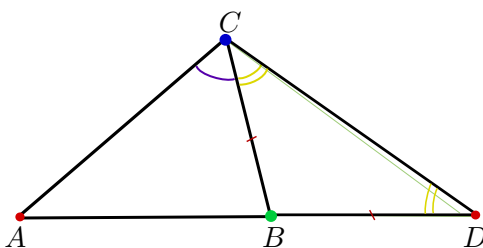
Dokaz Denimo, da velja $AB > AC$. Tedaj obstaja točka $D \in \overrightarrow{AC}$, za katero je $\overline{AD} \cong \overline{AB}$. Ker je $AD = AB > AC$, velja $A * C * D$. Ker je $\triangle ABD$ enakokraki trikotnik, po izreku o enakokrakem trikotniku velja $\angle ABD \cong \angle ADB$. Ker je $A * C * D$, po Posledici 23 sledi, da točka C leži v notranjosti kota $\angle ABD$. Torej je kot $\angle ABC$ manjši od kota $\angle ABD$ in posledično tudi od kota $\angle ADB = \angle CDB$. Ker je kot $\angle ACB$ zunanji kot trikotnika $\triangle BCD$, po izreku o zunanjem kotu velja $\mu(\angle CDB) < \mu(\angle ACB)$. Iz tega sledi, da je kot $\angle ABC$ manjši od kota $\angle ACB$.

Predpostavimo sedaj, da v trikotniku $\triangle ABC$ velja $\mu(\angle ABC) < \mu(\angle ACB)$. Uporabimo dokaz z analizo primerov:

1. možnost: Če bi veljalo $AC = AB$, bi po izreku o enakokrakem trikotniku sledilo $\angle ABC \cong \angle ACB$ in dobimo protislovje.
 2. možnost: Če bi veljalo $AC > AB$, potem bi po zgoraj dokazanem sledilo, da je kot $\angle ABC$ večji od kota $\angle ACB$ in dobimo protislovje.
- Edina preostala možnost je, da velja $AC < AB$. □

Trditev 43. Naj bo p poljubna premica in T točka, ki ne leži na premici p . Najkrajša daljica s krajiščem v točki T in drugim krajiščem na premici p leži na pravokotnici k premici p .

Dokaz Premica p ima po Posledici 41 natanko eno pravokotnico skozi točko T . Označimo z A točko, v kateri ta pravokotnica seka premico p , in naj bo B poljubna točka na premici p , različna od točke A . Izberimo točko $C \in p$, ta katero velja $C * A * B$. Kot $\angle TAC$ je zunanji kot trikotnika $\triangle ABT$, zato po izreku o zunanjem kotu velja $\mu(\angle TAC) > \mu(\angle ABT)$. Ker je premica \overleftrightarrow{AT} pravokotna na premico p , sta kota $\angle TAC$ in $\angle TAB$ skladna prava kota, torej je kot $\angle TAB$ večji od kota $\angle ABT$. Iz tega po Izreku 42 sledi, da je $TB > TA$. □



Slika 2.19: Dokaz izreka 44 (Trikotniška neenakost)

Izrek 44 (Trikotniška neenakost). V poljubnem trikotniku je vsota dolžin poljubnih dveh stranic večja od dolžine tretje stranice.

Dokaz (Vaje) Naj bodo A, B in C nekolinearne točke. Dokazati želimo, da tedaj velja

$$AB + BC > AC .$$

Naj bo $D \in \overrightarrow{AB}$ točka, za katero velja $A * B * D$ in $BD = BC$. Potem je $AD = AB + BC$. Točka B po Posledici 23 leži v notranjosti kota $\angle ACD$, zato velja $\mu(\angle BCD) < \mu(\angle ACD)$.

Ker je $\triangle BDC$ enakokraki trikotnik, po izreku o enakokrakem trikotniku velja $\angle BDC \cong \angle BCD$. Iz tega sledi $\mu(\angle ADC) = \mu(\angle BDC) < \mu(\angle ACD)$ in po Izreku 42 dobimo $AC < AD$ oziroma $AC < AB + BC$. \square

Izrek 45 (Izrek o tečaju). Če sta dve stranici nekega trikotnika paroma skladni dvema stranicama drugega trikotnika in v prvem trikotniku oklepata večji kot kakor njima skladni stranici v drugem trikotniku, tedaj je tretja stranica prvega trikotnika daljša od tretje stranice drugega trikotnika.

Dokaz Naj bosta $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$ poljubna trikotnika, za katera velja $\overline{CA} \cong \overline{FD}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ in $\mu(\angle CAB) > \mu(\angle FDE)$. Dokazati želimo, da je tedaj $BC > EF$.

Po aksiomu kotomera (konstrukcija kota) obstaja točka T , ki leži na isti strani premice \overleftrightarrow{AB} kot C , za katero velja $\angle TAB \cong \angle FDE$. Ker je kot $\angle FDE$ manjši od kota $\angle CAB$, vsaka točka $\overline{AT} \setminus \{A\}$ leži v notranjosti kota $\angle CAB$. Naj bo K točka na poltraku \overline{AT} , za katero velja $\overline{AK} \cong \overline{DF}$. Po aksiomu SKS sledi, da je $\triangle ABK \cong \triangle DEF$. Po izreku o prečki poltrak \overline{AT} seka stranico \overline{BC} v neki točki L .

Naj bo \overline{AR} simetrala kota $\angle CAL$. Po izreku o prečki poltrak \overline{AR} seka daljico \overline{CL} v neki točki M . Po aksiomu SKS velja $\triangle ACM \cong \triangle AKM$, torej je $CM = KM$. Po Izreku 44 (trikotniška neenakost) je $BK < BM + MK$ oziroma $BK < BM + MC$. Ker velja $B * M * C$, je $BM + MC = BC$ in če upoštevamo še $BK = EF$, dobimo $EF < BC$. \square

Izrek 46 (Izrek SKK). Naj bosta $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$ trikotnika, za katera velja $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ in $\angle BCA \cong \angle EFD$, tedaj je $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Dokaz Označimo s $F' \in \overline{EF}$ tisto točko, za katero velja $\overline{EF'} \cong \overline{BC}$. Po aksiomu SKS sledi $\triangle ABC \cong \triangle DEF'$, torej je $\angle BCA \cong \angle EFD \cong \angle EF'D$. Imamo tri možnosti:

1. možnost: Če velja $E * F * F'$, potem je kot $\angle EFD$ zunanji kot trikotnika $\triangle DFF'$, zato po izreku o zunanjem kotu velja $\mu(\angle EFD) > \mu(\angle EF'D)$ in dobimo protislovje.
 2. možnost: Če velja $E * F' * F$, potem je kot $\angle EF'D$ zunanji kot trikotnika $\triangle DF'F$, zato po izreku o zunanjem kotu velja $\mu(\angle EF'D) > \mu(\angle EFD)$ in dobimo protislovje.
- Preostane nam le še tretja možnost, da je $F' = F$ in torej $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. \square

Trikotnik, v katerem je eden od notranjih kotov pravi kot, imenujemo **pravokotni trikotnik**. Iz Posledice 41 sledi, da ima vsak trikotnik lahko kvečjemu en pravi notranji kot. V pravokotnem trikotniku stranico nasproti pravega kota imenujemo **hipotenuza**, preostali dve stranici pa imenujemo **kateti**.

Izrek 47 (Hipotenuza - kateta). Naj bosta $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$ dva pravokotna trikotnika s pravima kotoma $\angle BCA$ in $\angle EFD$. Če velja $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ in $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, tedaj je $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Dokaz Naj bo G točka na poltraku \overline{DF} , za katero velja $D * F * G$ in $\overline{FG} \cong \overline{AC}$. Po izreku o sokotih je kot $\angle EFG$ pravi kot, zato je skladen s pravim kotom $\angle BCA$. Po aksiomu SKS sledi, da je $\triangle ABC \cong \triangle GEF$ in torej $\overline{GE} \cong \overline{AB} \cong \overline{DE}$. Trikotnik $\triangle DEG$ je potemtakem enakokrak in po izreku o enakokrakem trikotniku velja $\angle FDE \cong \angle FGE$.

Trikotnika $\triangle DEF$ in $\triangle GEF$ imata dva para skladnih notranjih kotov in dva para skladnih stranic, zato sta skladna po izreku SKK. Torej je $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. \square

Definicija. Naj bo p poljubna premica in T poljubna točka. **Razdalja od točke T do premice p** je razdalja od točke T do presečišča premice p in pravokotnice na p skozi točko T . To razdaljo označimo z $d(T, p)$.

Izrek 48 (Karakterizacija simetrale kota). Naj bodo A , B in C nekolinearne točke in naj bo T točka v notranjosti kota $\angle BAC$. Točka T leži na simetrali kota $\angle BAC$ natanko tedaj, ko je enako oddaljena od premic \overleftrightarrow{AB} in \overleftrightarrow{AC} .

Dokaz Označimo z B' (oziroma C') presečišče premice \overleftrightarrow{AB} (oziroma \overleftrightarrow{AC}) in njene pravokotnice skozi točko T .

Predpostavimo najprej, da točka T leži na simetrali kota $\angle BAC$. Torej sta kota $\angle TAC'$ in $\angle TAB'$ skladna ter kota $\angle AC'T \cong \angle AB'T$ skladna, medtem ko je \overline{TA} skupna stranica trikotnikov $\triangle TAC'$ in $\triangle TAB'$. Po Izreku SKK sledi, da je $\triangle TAC' \cong \triangle TAB'$ in posledično $TC' = TB'$. Torej je $d(T, \overleftrightarrow{AC}) = d(T, \overleftrightarrow{AB})$.

Denimo sedaj še, da je točka T enako oddaljena od premic \overleftrightarrow{AB} in \overleftrightarrow{AC} , torej velja $TC' = TB'$. Pravokotna trikotnika $\triangle TAC'$ in $\triangle TAB'$ imata skupno hipotenuzo \overline{TA} ter skladni kateti $\overline{TC'}$ oz. $\overline{TB'}$, zato sta skladna po Izreku 47. Iz tega sledi, da sta kota $\angle TAC'$ in $\angle TAB'$ skladna, torej točka T leži na simetrali kota $\angle BAC$. \square

Definicija. Naj bo \overline{AB} poljubna daljica. **Simetrala** daljice \overline{AB} je premica, ki poteka skozi razpolovišče daljice \overline{AB} in je pravokotna na nosilko daljice \overline{AB} .

Izrek 49 (Karakterizacija simetrale daljice). Naj bosta A in B različni točki. Točka T leži na simetrali daljice \overline{AB} natanko tedaj, ko je enako oddaljena od točk A in B .

Dokaz Označimo z M razpolovišče daljice \overline{AB} in s s njeno simetralo.

Denimo najprej, da je $T \in s$. Če je slučajno $T = M$, seveda velja $AT = BT$. Sicer pa so A , T in M nekolinearne točke in ker je simetrala pravokotna na nosilko daljice \overline{AB} ter vsebuje točko M , sta $\triangle AMT$ in $\triangle BMT$ pravokotna trikotnika s skladnima stranicama $\overline{AM} \cong \overline{BM}$ ter skupno stranico \overline{MT} . Po izreku SKS sta trikotnika skladna, torej je tudi $AT = BT$.

Predpostavimo sedaj, da je P poljubna točka, za katero velja $AP = BP$. Imamo dve možnosti:

1. *možnost:* Če so točke A , B in P kolinearne, iz enakosti $AP + PB = AB$ sledi, da je točka P med A in B . Torej je P razpolovišče daljice \overline{AB} oz. $P = M \in s$.

2. *možnost:* Če pa so A , B in P nekolinearne točke, sta trikotnika $\triangle AMP$ in $\triangle BMP$ skladna po izreku SSS. Torej sta skladna tudi njuna notranja kota $\angle AMP \cong \angle BMP$, ki sta obenem sokota, zato sta prava. Torej je \overleftrightarrow{MP} pravokotnica k premici \overleftrightarrow{AB} skozi točko M , to pa je ravno premica s . \square

Poglavje 3

Vzporednost in nevtralna geometrija

Aksiomatski sistem ravninske geometrije, ki smo ga zgradili v 2. poglavju, še ne vsebuje pomembnega aksioma, ki določa klasično evklidsko geometrijo; to je evklidski aksiom o vzporednici. Razlog, da tega aksioma še nismo omenjali, je v tem, da znotraj ravninske geometrije ni nujno potreben. Aksiomatski sistem ravninske geometrije brez aksioma o vzporednicah imenujemo nevtralna geometrija. V tem poglavju bomo vzporednost splošno obravnavali v okviru nevtralne geometrije, nato pa bomo neformalno opisali še tri različne geometrije, ki jih lahko dobimo z dodatnimi aksiomi o vzporednici.

3.1 Nevtralna geometrija

Definicija. Dve premici v ravnini sta **vzporedni**, če nimata nobene skupne točke. Če je premica p vzporedna s premico q , to krajše označimo s $p \parallel q$.

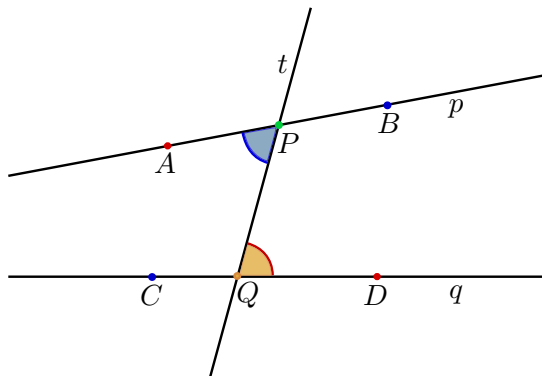
Trditev 50. Če sta dve različni premici q in r pravokotni na isto premico p , potem sta q in r vzporedni.

Dokaz Označimo s Q presečišče premic p in q ter z R presečišče premic p in r . Denimo, da se premici q in r sekata v neki točki T ; potem sta q in r dve različni pravokotnici k premici p skozi točko T , kar je v nasprotju s Posledico 41. Torej sta q in r vzporedni. \square

Izrek 51 (Obstoj vzporednice). Za poljubno premico p in poljubno točko T , ki ne leži na premici p , obstaja vsaj ena premica q , ki je vzporedna s p in vsebuje točko T .

Dokaz Naj bo p poljubna premica in T točka, ki ne leži na p . Po izreku o obstoju pravokotnice (Izrek 39) obstaja natanko ena premica t , ki je pravokotna na p in vsebuje točko T . Označimo $p \cap t = \{A\}$ in naj bo H ena od polravnin, omejenih s premico t . Po aksiomu o kotomeru A3 (konstrukcija kota) obstaja poltrak \overrightarrow{TB} , tako da je $B \in H$ in $\mu(\angle ATB) = 90$. Ker sta premici p in \overrightarrow{TB} obe pravokotni na premico t in sta različni (saj $T \notin p$), po Trditvi 50 sledi, da je premica \overrightarrow{TB} vzporedna s premico p . \square

Trditev 50 ima enostavno posplošitev. Naj bodo p , q in t paroma različne premice v ravnini. Premico t imenujemo **prečnica** ali **transverzala** premic p in q , če t seka premici p oz. q v dveh različnih točkah P oz. Q .



Slika 3.1: Izmenična notranja kota

Naj bo t prečnica, ki seka premici p oz. q v točkah P oz. Q . Če sta $A \in p$ in $D \in q$ točki, ki ležita na različnih bregovih prečnice t , tedaj kota $\angle APQ$ in $\angle PQD$ imenujemo **izmenična notranja kota**. Po tej definiciji sta tudi kota $\angle CQP$ in $\angle QPB$ izmenična notranja kota.

Izrek 52 (Izrek o izmeničnih notranjih kotih). Če prečnica t seka premici p in q tako, da sta izmenična notranja kota skladna, sta p in q vzporedni premici.

Dokaz Označimo s P presečišče premic p in t ter s Q presečišče premic q in t . Naj bosta $A \in p$ in $D \in q$ točki, ki ležita na različnih bregovih prečnice t , tako da sta izmenična notranja kota $\angle APQ$ in $\angle PQD$ skladna. Denimo, da p in q nista vzporedni; torej se sekata v neki točki T , ki ne leži na prečnici t .

1. *možnost*: Če T leži v isti polravnini, omejeni s premico t , kot točka A , tedaj je kot $\angle PQD$ zunanji kot trikotnika ΔPTQ , ki je po izreku o zunanjem kotu večji od nepriležnega notranjega kota $\angle TPQ = \angle APQ$ in dobimo protislovje.

2. *možnost*: Če T leži v isti polravnini, omejeni s premico t , kot točka D , tedaj je kot $\angle APQ$ zunanji kot trikotnika ΔPQT , ki je po izreku o zunanjem kotu večji od nepriležnega notranjega kota $\angle PQT = \angle PQD$ in dobimo protislovje. \square

Izrek 53. Za poljubne tri točke A , B in C velja $AB + BC \geq AC$.

Dokaz Če so A , B in C nekolinearne točke, potem po trikotniški neenakosti (Izrek 44) velja $AB + BC > AC$.

Denimo sedaj, da so A , B in C kolinearne, ter izberimo koordinatni sistem $f: \overleftrightarrow{AB} \rightarrow \mathbb{R}$ na premici, ki te tri točke vsebuje. Označimo njihove koordinate z $x = f(A)$, $y = f(B)$ in $z = f(C)$ ter izračunamo

$$AB + BC = |f(A) - f(B)| + |f(B) - f(C)| = |x - y| + |y - z| \geq |x - z| = |f(A) - f(C)| = AC. \quad \square$$

Opomba 14. Z izrekom 53 smo končno potrdili, da je razdalja v ravninski geometriji res metrika (glejte lemo 9).

Posledica 54 (Večkotniška neenakost). Naj bo $n \geq 3$. Za poljubno n -terico točk A_1, A_2, \dots, A_n velja

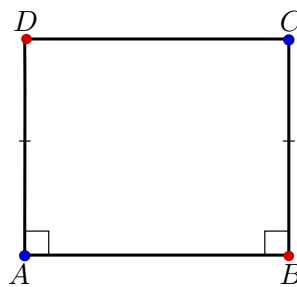
$$A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n \geq A_1A_n. \quad (3.1)$$

Dokaz Dokazujemo z indukcijo po številu n . Za $n = 3$ neenakost velja po Izreku 53. Naj bo sedaj $n \geq 3$ neko naravno število in denimo, da neenakost (3.1) velja za poljubno n -terico točk. Za poljubno $(n + 1)$ -terico točk A_1, A_2, \dots, A_{n+1} tedaj po indukcijski predpostavki in Izreku 53 dobimo

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n + A_nA_{n+1} \geq A_1A_n + A_nA_{n+1} \geq A_1A_{n+1}. \quad \square$$

Spomnimo se definicije štirikotnika iz Razdelka 2.6. Naj bodo A, B, C in D štiri točke, od katerih nobena trojica točk ni kolinearna. Če se daljice \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} in \overline{DA} sekajo le v skupnih krajiščih, je njihova unija štirikotnik $\square ABCD$. Koti $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ in $\angle DAC$ se imenujejo notranji koti štirikotnika $\square ABCD$. Štirikotnik se imenuje **pravokotnik**, če so vsi štirje notranji koti pravi koti. Štirikotnik se imenuje **paralelogram**, če sta nosilki vsakega para nasprotnih stranic tega štirikotnika vzporedni.

Na podlagi aksiomov, ki smo jih v naši geometriji privzeli dosedaj, ni mogoče dokazati, da pravokotniki obstajajo. **Saccherijev štirikotnik** je štirikotnik $\square ABCD$, v katerem sta notranja kota $\angle DAB$ in $\angle ABC$ prava kota, oglišči C in D ležita na istem bregu premice \overleftrightarrow{AB} , stranici \overline{BC} in \overline{AD} pa sta skladni. V tem primeru stranico \overline{AB} imenujemo **spodnja osnovnica**, stranico \overline{CD} pa **zgornja osnovnica** Saccherijevega štirikotnika. Notranja kota $\angle DAB$ in $\angle ABC$ se imenujeta kota ob spodnji osnovnici, notranja kota $\angle BCD$ in $\angle CDA$ pa kota ob zgornji osnovnici. Kaj lahko povemo o poljubnem Saccherijevem štirikotniku?



Slika 3.2: Saccherijev štirikotnik

Trditev 55. V vsakem Saccherijevem štirikotniku velja:

- (a) diagonali štirikotnika sta skladni,
- (b) kota ob zgornji osnovnici sta skladna,

(c) štirikotnik je paralelogram.

Dokaz Naj bo $\square ABCD$ Saccherijev štirikotnik, v katerem sta kota $\angle DAB$ in $\angle ABC$ prava kota, stranici \overline{BC} in \overline{DA} pa sta skladni.

- (a) Trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle BAD$ sta skladna po aksiomu SKS. Torej sta tudi njuni stranici \overline{AC} in \overline{BD} skladni.
- (b) Pri (a) smo dokazali, da velja $\triangle ABC \cong \triangle BAD$, torej sta skladna tudi notranja kota $\angle CAB \cong \angle DBA$. Po aksiomu o kotomeru (vsota kotov) dobimo

$$\mu(\angle DAC) = \mu(\angle DAB) - \mu(\angle CAB) = \mu(\angle CBA) - \mu(\angle ABD) = \mu(\angle CBD),$$

torej sta kota $\angle DAC$ in $\angle CBD$ skladna. Trikotnika $\triangle DAC$ in $\triangle CBD$ imata potemtakem skladna para stranic $\overline{DA} \cong \overline{BC}$ in $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ ter skladna vmesna kota $\angle DAC \cong \angle CBD$, zato sta skladna po aksiomu SKS. Iz tega sledi, da sta skladna njuna notranja kota $\angle CDA$ in $\angle DCB$, to pa sta ravno kota ob zgornji osnovnici štirikotnika.

- (c) Nosilka stranice \overline{AB} je pravokotna na premici \overleftrightarrow{DA} in \overleftrightarrow{BC} , zato sta nosilki stranic \overline{BC} in \overline{DA} vzporedni po Trditvi 50.

Označimo z M razpolovišče stranice \overline{AB} in z N razpolovišče stranice \overline{CD} . Trikotnika $\triangle BCN$ in $\triangle ADN$ imata skladni stranici $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ in $\overline{CN} \cong \overline{DN}$ ter skladna vmesna kota $\angle BCN \cong \angle ADN$ (kar smo dokazali pri (b)), zato sta skladna po aksiomu SKS. Iz tega sledi, da je tudi $\overline{BN} \cong \overline{AN}$. To pomeni, da imata trikotnika $\triangle AMN$ in $\triangle BMN$ paroma skladne vse tri stranice, zato sta skladna po izreku SSS. Ker sta notranja kota $\angle AMN$ in $\angle BMN$ skladna in obenem sokota, sta prava kota. Torej je premica \overleftrightarrow{MN} pravokotna na osnovnico \overline{AB} .

Trikotnika $\triangle DAM$ in $\triangle CBM$ sta skladna po aksiomu SKS. Iz tega sledi, da je $\overline{DM} \cong \overline{CM}$, zato imata trikotnika $\triangle DMN$ in $\triangle CMN$ paroma skladne vse tri stranice in sta skladna po izreku SSS. Torej sta tudi notranja kota $\angle MND$ in $\angle MNC$ skladna ter obenem sokota, zato sta prava. S tem smo dokazali, da je premica \overleftrightarrow{MN} pravokotna na nosilki obeh osnovnic \overline{AB} in \overline{CD} , zato sta nosilki osnovnic vzporedni po Trditvi 50. \square

Trditev 56. Naj bosta $\square ABCD$ in $\square A'B'C'D'$ Saccherijeva štirikotnika s spodnjima osnovnicama \overline{AB} in $\overline{A'B'}$. Če velja $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ in $\overline{DA} \cong \overline{D'A'}$, potem sledi $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$, $\angle BCD \cong \angle B'C'D'$ in $\angle CDA \cong \angle C'D'A'$.

Dokaz Iz skladnosti stranic \overline{DA} in $\overline{D'A'}$ sledi tudi skladnost stranic $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$. Trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle A'B'C'$ sta skladna po aksiomu SKS, zato je $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$. Ker je točka C v notranjosti kota $\angle DAB$ in točka C' v notranjosti kota $\angle D'A'B'$, po aksiomu kotomera velja $\mu(\angle DAC) = 90 - \mu(\angle CAB) = 90 - \mu(\angle C'A'B') = \mu(\angle D'A'C')$, torej sta kota $\angle DAC$ in $\angle D'A'C'$ skladna. Po aksiomu SKS sledi, da je $\triangle DAC \cong \triangle D'A'C'$, torej je tudi $\angle CDA \cong \angle C'D'A'$ in $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$. Po trditvi 55 dobimo še $\angle BCD \cong \angle B'C'D'$. \square

Trditev 57. V vsakem Saccherijevem štirikotniku je dolžina zgornje osnovnice večja ali enaka od dolžine spodnje osnovnice.

Dokaz Naj bo $\square A_1A_2B_2B_1$ Saccherijev štirikotnik s spodnjo osnovnico $\overline{A_1A_2}$. Želimo dokazati, da tedaj velja $A_1A_2 \leq B_1B_2$. Naj bodo A_3, A_4, \dots, A_{n+1} točke, za katere velja $A_1 * A_2 * A_3 * \dots * A_{n+1}$ in $A_iA_{i+1} = A_1A_2$ za $i = 1, 2, \dots, n$. Naj bo B_i točka, za katero je kot $\angle A_{i+1}A_iB_i$ pravi kot in $A_iB_i = A_1B_1$ za $i = 1, 2, \dots, n+1$. Potem je $\square A_iA_{i+1}B_{i+1}B_i$ Saccherijev štirikotnik za vsak $i = 1, 2, \dots, n$. Po trditvi 56 velja $B_1B_2 = B_2B_3 = \dots = B_nB_{n+1}$. Po večkotniški neenakosti (Posledica 54) za točke B_1, B_2, \dots, B_{n+1} velja

$$B_1B_{n+1} \leq B_1B_2 + B_2B_3 + \dots + B_nB_{n+1} = n \cdot B_1B_2.$$

Prav tako za točke $A_1, B_1, B_2, \dots, B_n, B_{n+1}, A_{n+1}$ po večkotniški neenakosti velja

$$A_1A_{n+1} \leq A_1B_1 + B_1B_{n+1} + B_{n+1}A_{n+1} \leq 2A_1B_1 + nB_1B_2$$

in ker je $A_1A_{n+1} = nA_1A_2$, za poljubno naravno število n sledi $nA_1A_2 \leq nB_1B_2 + 2A_1B_1$.

Denimo sedaj, da bi veljalo $A_1A_2 > B_1B_2$, in označimo $\epsilon = A_1A_2 - B_1B_2$ ter $M = 2A_1B_1$. Tedaj je $\epsilon > 0$ in $M > 0$, vendar je $n\epsilon \leq M$ za poljubno naravno število n . To je v nasprotju z dejstvom, da množica naravnih števil ni navzgor omejena, zato pridemo v protislovje. \square

Trditev 58. Če je $\triangle ABD$ pravokotni trikotnik s pravim kotom $\angle DAB$, tedaj velja

$$\mu(\angle ABD) + \mu(\angle BDA) \leq 90.$$

Dokaz Naj bo C točka, za katero velja, da je $\square ABCD$ Saccherijev štirikotnik. Tedaj je $DA = BC$ in $BD = DB$. Če bi veljalo $\mu(\angle BDA) > \mu(\angle CBD)$, bi po izreku o tečaju (Izrek 45) sledilo $AB > CD$, kar je v nasprotju s Trditvijo 57. Torej je $\mu(\angle BDA) \leq \mu(\angle CBD)$. Po aksiomu o kotomeru velja $\mu(\angle CBD) = 90 - \mu(\angle ABD)$, torej sledi $\mu(\angle ABD) + \mu(\angle BDA) \leq \mu(\angle ABD) + \mu(\angle CBD) = 90$. \square

Posledica 59. Vsak pravokotni trikotnik ima le en pravi notranji kot, preostala dva notranja kota pa sta ostra. Hipotenuza je daljša od obeh katet pravokotnega trikotnika.

Dokaz Prvi del sledi neposredno iz Trditve 58. Drugi del sledi po Izreku 42. \square

V trikotniku $\triangle ABC$ je **višina** na stranico daljica, ki je pravokotna na nosilko te stranice in ima eno krajišče na nosilki te stranice, drugo krajišče pa v oglišču, ki je tej stranici nasprotno. Krajišče višine, ki leži na nosilki stranice, imenujemo **nožišče** višine.

Trditev 60. V trikotniku $\triangle ABC$ naj bo D nožišče višine na stranico \overline{AB} . Če je \overline{AB} najdaljša stranica trikotnika $\triangle ABC$, tedaj velja $A * D * B$.

Dokaz Denimo, da ne velja $A * D * B$, tedaj je bodisi $D = A$, $D = B$, $D * A * B$ bodisi $A * B * D$. Dokazali bomo, da nobena od teh možnosti ni mogoča.

1. *možnost*: Če je $D = A$, potem je $\triangle ABC$ pravokotni trikotnik s pravim kotom $\angle CAB$, torej po posledici 59 velja $CB > AB$, torej \overline{AB} ni najdaljša stranica trikotnika.

2. *možnost*: Če je $D = B$, podobno dobimo $AC > AB$ in \overline{AB} ni najdaljša stranica trikotnika.

3. *možnost*: Če je $D * A * B$, potem velja $AB < DB$ in ker je \overline{DB} kateta, \overline{BC} pa hipotenuza pravokotnega trikotnika $\triangle DBC$, tudi $DB < BC$. Iz tega sledi $AB < BC$, kar je spet v nasprotju z dejstvom, da je \overline{AB} najdaljša stranica trikotnika $\triangle ABC$.

4. *možnost*: Če je $A * B * D$, velja $AB < AD$ in ker je \overline{AC} hipotenuza, \overline{AD} pa kateta pravokotnega trikotnika $\triangle ADC$, sledi $AB < AC$ in spet dobimo protislovje. \square

Izrek 61. Vsota velikosti notranjih kotov poljubnega trikotnika je manjša ali enaka 180.

Dokaz Brez škode za splošnost privzemimo, da je \overline{AB} najdaljša stranica trikotnika $\triangle ABC$, ter označimo z D nožišče višine na stranico \overline{AB} . Po Trditvi 60 velja $A * D * B$, torej točka D leži v notranjosti kota $\angle BCA$. Uporabimo Trditev 58 za pravokotna trikotnika $\triangle ADC$ in $\triangle BDC$ ter dobimo $\mu(\angle CAD) + \mu(\angle DCA) \leq 90$ in $\mu(\angle DBC) + \mu(\angle BCD) \leq 90$. Po aksiomu o kotomeru velja $\mu(\angle BCA) = \mu(\angle BCD) + \mu(\angle DCA)$. Za vsoto notranjih kotov trikotnika $\triangle ABC$ potemtakem velja

$$\begin{aligned} & \mu(\angle CAB) + \mu(\angle ABC) + \mu(\angle BCA) = \\ & = \mu(\angle CAD) + \mu(\angle DBC) + \mu(\angle BCD) + \mu(\angle DCA) \leq 180. \quad \square \end{aligned}$$

3.2 Aksiomi o vzporednici

V evklidski ravnini velja vsem dobro znani aksiom o vzporednicah:

Evklidski aksiom o vzporednici Za poljubno premico p in poljubno točko T , ki ne leži na premici p , obstaja natanko ena premica q , ki je vzporedna s premico p in vsebuje točko T .

V Evklidovem času in tudi še več tisočletij kasneje so matematiki evklidski aksiom privzemali kot nekakšen zakon narave, v katerega ni mogoče dvomiti. Šele v devetnajstem stoletju so znanstveniki Lobachevski, Bolyai in Gauss prišli do presenetljivega odkritja, da smiselno in konsistentno matematično teorijo lahko dobimo tudi, če privzamemo bistveno drugačen aksiom o vzporednicah:

Hiperbolični aksiom o vzporednicah Za poljubno premico p in poljubno točko T , ki ne leži na premici p , obstajata vsaj dve različni premici q in r , ki sta vzporedni s premico p in vsebujeta točko T .

Razen navedenih dveh aksiomov teoretično obstaja še tretja možnost, da vzporednica skozi dano točko sploh ne obstaja. To določa naslednji aksiom:

Eliptični aksiom o vzporednicah Nobeni dve premici v ravnini nista vzporedni.

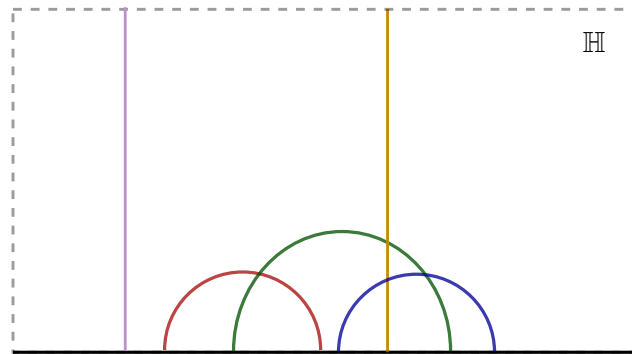
Izkaže se, da za vsakega od navedenih treh aksiomov o vzporednici obstaja smiselni aksiomatski sistem geometrije, v katerem ta aksiom velja.

3.3 Model hiperbolične geometrije

V tem razdelku si bomo ogledali model geometrije, za katero veljajo vsi aksiomi nevtralne geometrije in še hiperbolični aksiom o vzporednici. Označimo s \mathbb{H} podmnožico kompleksne ravnine

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}.$$

To množico imenujemo tudi **hiperbolična polravnina**. Premice naše geometrije bodo dveh vrst: (a) presek \mathbb{H} z navpično premico z enačbo $\text{Re}(z) = k$, kjer je k poljubno realno število, ter (b) presek \mathbb{H} s poljubno krožnico, ki ima središče na realni osi (torej na robu polravnine \mathbb{H}). To pomeni, da so premice v naši geometriji navpični poltraki s krajiščem na realni osi in polkrožnice s središčem na realni osi.



Slika 3.3: Hiperbolična polravnina

Lema 62. V tej geometriji velja incidenčni aksiom **I-1**: Poljubni dve različni točki hiperbolične polravnine \mathbb{H} ležita na natanko eni premici.

Dokaz Naj bosta $A, B \in \mathbb{H}$ dve različni točki.

- Če imata A in B isto realno komponento (oz. isto x -koordinato x_0), tedaj ležita na natanko eni navpični premici $\text{Re}(z) = x_0$. Ker vsaka polkrožnica s središčem na realni osi poljubno navpično premico seka kvečjemu enkrat, točki A in B ne ležita na nobeni taki polkrožnici.
- Če imata A in B različni x -koordinati, tedaj seveda ne moreta ležati na isti navpični premici. Če obe hkrati ležita na polkrožnici s središčem $S(a, 0)$, tedaj njune koordinate $A(x_1, y_1)$ in $B(x_2, y_2)$ zadoščajo enačbi:

$$(x_1 - a)^2 + y_1^2 = (x_2 - a)^2 + y_2^2$$

$$x_1^2 + y_1^2 - 2x_1a = x_2^2 + y_2^2 - 2x_2a$$

$$a = \frac{x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2}{2(x_2 - x_1)}$$

Središče in polmer polkrožnice sta torej natanko določena s koordinatami točk A in B . Točki potemtakem res ležita na natanko eni hiperbolični premici. \square

Definirali smo torej točke in premice hiperbolične polravnine, sedaj pa potrebujemo še definicijo razdalje. Naj bosta $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \in \mathbb{H}$ poljubni točki hiperbolične polravnine ter označimo s C in D točki, v katerih hiperbolična premica, na kateri ležita A in B , seka realno os (v primeru, da je $x_1 = x_2$, velja $C = D$ in je presečišče eno samo). Hiperbolično razdaljo med točkama A in B izračunamo z

$$d(A, B) = \begin{cases} \left| \ln \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} \right|, & \text{če } x_1 \neq x_2, \\ \left| \ln \frac{y_2}{y_1} \right|, & \text{če } x_1 = x_2. \end{cases}$$

Razmislimo, da tako definirana razdalja med točkama hiperbolične polravnine ustreza aksiomu ravnila **A1**. Kako definiramo koordinatni sistem na navpični hiperbolični premici? Naj bo p poljubna navpična premica in definirajmo funkcijo $f: p \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $f(T) = \ln y$, kjer sta (x, y) kartezični koordinati točke T . Ker je imaginarna komponenta poljubne točke v hiperbolični polravnini pozitivna, je $f: p \rightarrow \mathbb{R}$ običajna logaritemska funkcija $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, katere odvod $(\ln y)' = \frac{1}{y}$ je pozitiven za vsak $y > 0$. To pomeni, da je logaritemska funkcija strogo naraščajoča in posledično injektivna. Poleg tega je f surjektivna, saj se za poljubno realno število t točka na premici p z y -koordinato e^t z f preslika v t . Za dve točki $A(x_1, y_1)$ in $B(x_1, y_2)$ na premici p velja $|f(A) - f(B)| = |\ln y_2 - \ln y_1| = \left| \ln \frac{y_2}{y_1} \right| = d(A, B)$.

Kako pa definiramo koordinatni sistem na hiperbolični premici, ki ni navpična? Naj bo sedaj p hiperbolična premica, ki seka realno os v točkah C in D , ter fiksirajmo točko $P \in p$. Za poljubno točko $A \in p$ lahko definiramo realno število

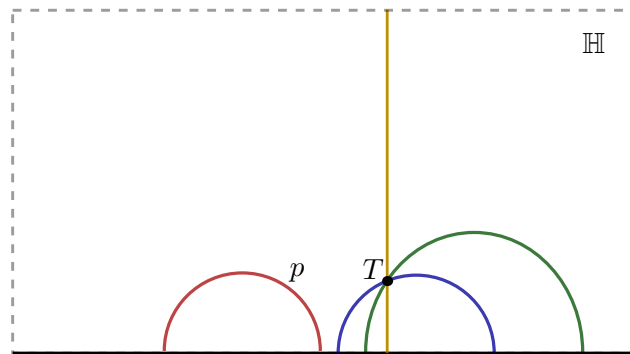
$$f(A) = \ln \frac{AC \cdot PD}{AD \cdot PC}$$

in s tem dobimo funkcijo $f: p \rightarrow \mathbb{R}$. Za dve točki $A, B \in p$ tedaj velja

$$|f(A) - f(B)| = \left| \ln \frac{AC \cdot PD}{AD \cdot PC} - \ln \frac{BC \cdot PD}{BD \cdot PC} \right| = \left| \ln \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} \right| = d(A, B).$$

Da se premisliti, da je f bijektivna funkcija. Hiperbolična geometrija torej ustreza aksiomu ravnila **A1**.

Na podlagi hiperbolične razdalje lahko definiramo vmesnost, daljice in poltrake povsem enako kot v nevtralni geometriji. Kot med dvema hiperboličnima premicama definiramo povsem analogno. Pri tem je vsaj en krak hiperboličnega kota krožni lok. Velikost kota med dvema krožnima lokoma, ki se sekata v točki A , definiramo kot velikost kota med tangentama na ta krožna loka v točki A v evklidski geometriji. Da se preveriti, da tako definirani model ustreza vsem aksiomom nevtralne geometrije, in posledično tudi vsem trditvam in izrekom, ki smo jih dosedaj uspeli dokazati.



Slika 3.4: Tri različne vzporednice k premici p skozi točko T v hiperbolični ravnini

Kako pa je z vzporednostjo v hiperbolični geometriji? Hitro lahko opazimo, da ima dana hiperbolična premica skozi neko točko, ki ne leži na njej, več kot le eno vzporednico. Ta model geometrije torej ustreza hiperboličnemu aksiomu o vzporednici.

Poglavje 4

Evklidska geometrija

Evklidski aksiom o vzporednici (EAV) Za poljubno premico p in poljubno točko T , ki ne leži na premici p , obstaja natanko ena premica q , ki je vzporedna s premico p in vsebuje točko T .

Geometrijo, ki jo določajo dosedaj navedeni aksiomi nevtralne geometrije skupaj z evklidskim aksiomom o vzporednici, imenujemo **evklidska geometrija**. Izkaže se, da ima ta dodatni aksiom številne močne posledice.

Izrek 63 (Obrat izreka o izmeničnih kotih). Če prečnica t seka vzporedni premici p in q , tedaj sta izmenična notranja kota skladna.

Dokaz Označimo s Q presečišče premic t in q . Obstaja natanko ena premica q' , ki vsebuje točko Q in za katero velja, da sta izmenična notranja kota, ki ju premici p in q' oklepata s prečnico t , skladna. Po izreku o izmeničnih notranjih kotih (Izrek 52) je $q' \parallel p$ in po evklidskem aksiomu o vzporednici sledi $q' = q$. Torej sta izmenična notranja kota, ki ju premici p in q oklepata s prečnico t , skladna. \square

Posledica 64. V evklidski geometriji je vsak Saccherijev štirikotnik pravokotnik.

Dokaz Naj bo $\square ABCD$ Saccherijev štirikotnik, v katerem sta notranja kota $\angle DAB$ in $\angle ABC$ prava ter stranici \overline{AD} in \overline{BC} skladni. Ker sta nosilki stranic \overline{AD} in \overline{BC} vzporedni, po obratu izreka o izmeničnih kotih velja $\angle DAC \cong \angle BCA$. Po aksiomu SKS sledi, da sta trikotnika $\triangle DAC$ in $\triangle BCA$ skladna, torej je kot $\angle CDA \cong \angle ABC$ pravi kot. Iz trditve 55 dobimo, da je tudi kot $\angle BCD$ pravi. \square

Izrek 65 (Izrek o vsoti notranjih kotov trikotnika). V evklidski geometriji je vsota notranjih kotov poljubnega trikotnika enaka 180.

Dokaz Naj bo $\triangle ABC$ poljuben trikotnik in označimo s p vzporednico k premici \overleftrightarrow{AB} skozi točko C . Naj bosta $D, E \in p$ točki, za kateri velja $D * C * E$ in točka D je na isti strani premice \overleftrightarrow{BC} kot točka A . Po obratu izreka o izmeničnih notranjih kotih velja $\angle BAC \cong \angle DCA$ in $\angle ABC \cong \angle BCE$. Kota $\angle BCD$ in $\angle BCE$ sta sokota in potentakem

suplementarna, zato velja $\mu(\angle DCA) + \mu(\angle ACB) + \mu(\angle BCE) = \mu(\angle BCD) + \mu(\angle BCE) = 180$. Iz tega sledi

$$\mu(\angle CAB) + \mu(\angle ABC) + \mu(\angle BCA) = 180. \quad \square$$

Posledica 66. Velikost zunanjšega kota trikotnika je enaka vsoti velikosti nepriležnih notranjih kotov.

Dokaz Označimo z α velikost notranjšega kota trikotnika $\triangle ABC$. Zunanji kot je sokot notranjšega kota trikotnika, zato je po izreku o sokotih velikost zunanjšega kota enaka $180 - \alpha$. Po izreku o vsoti notranjih kotov trikotnika je vsota nepriležnih notranjih kotov prav tako enaka $180 - \alpha$. \square

Trditev 67. Vsaka od spodnjih izjav je ekvivalentna evklidskemu aksiomu o vzporednici:

1. (Proklov aksiom) Če sta p in q vzporedni premici in premica $t \neq p$ seka premico p , tedaj t seka premico q .
2. Če sta p in q vzporedni premici in je $t \perp p$, tedaj je $t \perp q$.
3. Če za premice p, q, r in s velja $p \parallel q, r \perp p$ in $s \perp q$, tedaj je bodisi $r = s$ bodisi $r \parallel s$.
4. (Tranzitivnost vzporednosti) Če je $l \parallel m$ in $m \parallel n$, tedaj je bodisi $l = n$ bodisi $l \parallel n$.

Dokaz 1. Dokažimo najprej, da iz Proklovega aksioma sledi evklidski aksiom o vzporednici. Predpostavimo, da Proklov aksiom velja. Naj bo p poljubna premica in T točka, ki ne leži na premici p . Po izreku o obstoju vzporednice obstaja vsaj ena vzporednica k premici p , ki vsebuje točko T . Pa denimo, da bi obstajala več kot ena taka vzporednica, ter označimo s q in r dve različni vzporednici k premici p , ki vsebujeta točko T . Torej velja $q \parallel p$ in $r \parallel p$. Ker sta q in r različni premici, je njuna edina skupna točka T . Premici q in p sta vzporedni, premica r pa seka premico q . Iz tega po Proklovem aksiomu sledi, da premica r seka tudi premico p , kar pa ni mogoče, saj sta r in p vzporedni. Ker smo prišli do protislovja, obstaja natanko ena vzporednica premice p , ki vsebuje točko T . Evklidski aksiom o vzporednici potemtakem velja.

Dokažimo sedaj še, da iz evklidskega aksioma o vzporednici sledi Proklov aksiom. Predpostavimo, da evklidski aksiom o vzporednici velja. Naj bosta p in q vzporedni premici in naj bo $t \neq p$ premica, ki seka premico p v točki T . Če premica t ne bi sekala premice q , potem bi bili p in t dve različni vzporednici k premici q , ki vsebujeta točko T , to pa je v nasprotju z evklidskim aksiomom o vzporednici. Torej premica t seka premico q ter Proklov aksiom velja.

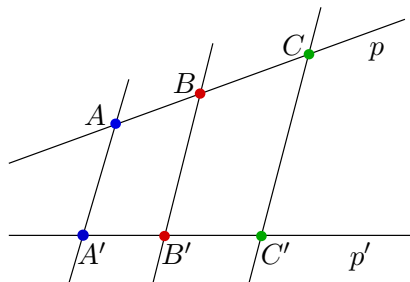
2. Vaja!
3. Vaja!

4. Dokažimo najprej, da iz izjave 4. sledi EAV. Predpostavimo, da tranzitivnost vzporednosti velja. Naj bo p poljubna premica in T točka, ki ne leži na premici p . Po izreku o obstoju vzporednice obstaja vsaj ena vzporednica premice p , ki vsebuje točko T . Pa denimo, da bi obstajala več kot ena taka vzporednica, ter označimo s q in r dve različni vzporednici premice p , ki vsebujeta točko T . Torej velja $q \parallel p$ in $p \parallel r$. Po izjavi 4. sledi, da je bodisi $r = q$ bodisi $r \parallel q$. Ker sta q in r različni premici, bi morali biti torej vzporedni, kar pa je v nasprotju z dejstvom, da se sekata v točki T . Prišli smo do protislovja, torej obstaja natanko ena vzporednica premice p , ki vsebuje točko T . S tem smo dokazali, da velja EAV.

Dokažimo sedaj še, da iz EAV sledi tranzitivnost vzporednosti. Predpostavimo, da EAV velja. Naj bodo p , q in r premice, za katere velja $p \parallel q$ in $q \parallel r$. Pa denimo, da se premici p in r sekata v točki T . Potem sta premici p in r dve vzporednici premice q , ki vsebujeta točko T , zato po EAV sledi $p = r$. Če pa se premici p in r ne sekata, potem sta vzporedni. S tem smo dokazali, da sta premici p in r bodisi enaki bodisi vzporedni, torej izjava 4. velja.

4.1 Vzporedne projekcije

Po Posledici 41 ima dana premica skozi vsako točko ravnine natanko eno pravokotnico. Tako lahko za poljubni premici p in p' definiramo **pravokotno projekcijo** premice p na premico p' . To je funkcija $f: p \rightarrow p'$, ki vsako točko $T \in p$ preslika v točko $f(T)$, to je presečišče premice p' in pravokotnice na p' skozi točko T . Splošneje lahko eno premico na drugo namesto vzdolž pravokotnice projiciramo vzdolž poljubne smeri, le da je smer projekcije ves čas enaka. Podajmo sedaj natančno definicijo vzporedne projekcije.



Slika 4.1: Vzporedna projekcija

Definicija. Imejmo premici p in p' , ki ju seka prečnica t . Za poljubno točko $P \in p$ označimo s t_P vzporednico k premici t skozi točko P . Naj bo $f(P)$ presečišče premic t_P in p' . Ta predpis določa funkcijo $f: p \rightarrow p'$, ki jo imenujemo **vzporedna projekcija premice p na p' v smeri t** .

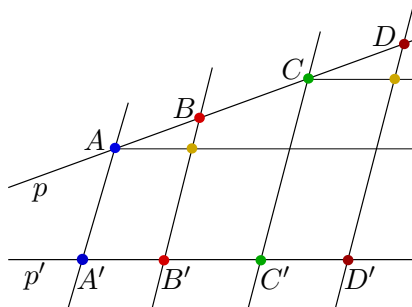
Izrek 68. Vzporedna projekcija je bijektivna funkcija, ki ohranja vmesnost točk.

Dokaz Imejmo premici p in p' , ki ju seka prečnica t . Naj bo $f: p \rightarrow p'$ vzporedna projekcija premice p na premico p' v smeri t . Če sta $A, B \in p$ poljubni dve različni točki, tedaj njuni sliki $A' = f(A)$ in $B' = f(B)$ ležita na vzporednih premicah t_A in t_B , zato je $A' \neq B'$. Torej je f injektivna funkcija. Za dokaz surjektivnosti izberimo poljubno točko $X \in p'$ in označimo z u vzporednico k premici t skozi točko X . Potem je $f^{-1}(X) = u \cap p$ množica z enim elementom - točko, ki se s f preslika v točko X . Če označimo z $g: p' \rightarrow p$ vzporedno projekcijo premice p' na p v smeri t , je g inverz funkcije f .

Izberimo poljubne tri točke $A, B, C \in p$, za katere velja $A * B * C$, ter označimo $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ in $C' = f(C)$. Označimo s t_A , t_B in t_C vzporednice k premici t skozi točke A , B in C , torej velja $t_A \parallel t_B \parallel t_C$. Ker daljica $\overline{CC'}$ ne seka premice t_B , točki C in C' ležita na istem bregu premice t_B . Ker daljica $\overline{AA'}$ ne seka premice t_B , točki A in A' ležita na istem bregu premice t_B . Ker velja $A * B * C$, točki A in C ležita na različnih bregovih premice t_B . Iz tega sledi, da točki A' in C' ležita na različnih bregovih premice t_B , torej daljica $\overline{A'C'}$ seka premico t_B v neki točki Q . Ker $t_B \neq p'$, se premici t_B in p' sekata le v eni točki, zato je $Q = B'$. To pomeni, da točka B' leži na daljici $\overline{A'C'}$ in posledično $A' * B' * C'$. \square

Lema 69. Nasprotni stranici paralelograma sta skladni.

Dokaz Imejmo paralelogram $\square ABCD$. Prečnica \overleftrightarrow{AC} seka oba para vzporednih nosilk stranic paralelograma in po obratu izreka o izmeničnih kotih velja $\angle BAC \cong \angle DCA$ ter $\angle BCA \cong \angle DAC$. Trikotnika $\triangle ACB$ in $\triangle CAD$ sta skladna po izreku KSK. Iz tega sledi, da sta stranici \overline{AB} in \overline{CD} skladni ter stranici \overline{DA} in \overline{BC} skladni. \square



Slika 4.2: Dokaz trditve 70

Trditev 70. Vzporedna projekcija ohranja skladnost daljic.

Dokaz Imejmo premici p in p' , ki ju seka prečnica t . Naj bo $f: p \rightarrow p'$ vzporedna projekcija premice p na premico p' v smeri t . Naj bodo $A, B, C, D \in p$ točke, za katere velja $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Označimo $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ in $D' = f(D)$. Želimo dokazati, da je tedaj tudi $\overline{A'B'} \cong \overline{C'D'}$.

1.možnost: Če je $p \parallel p'$, tedaj sta daljici \overline{AB} in $\overline{A'B'}$ nasprotni stranici paralelograma in

velja $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$. Podobno sta tudi daljici \overline{CD} in $\overline{C'D'}$ nasprotni stranici paralelograma in potemtakem skladni. Iz tega sledi $\overline{C'D'} \cong \overline{A'B'}$.

2. *možnost*: Denimo sedaj, da premici p in p' nista vzporedni. Označimo s q vzporednico k premici p' skozi točko A , ki seka t_B v točki E . Označimo z r vzporednico k premici p' skozi točko C , ki seka t_D v točki F . Torej sta q in r vzporednici, ki ju seka prečnica p . Če ustrezno izberemo oznake točk C in D , sta kota $\angle BAE$ in $\angle DCF$ skladna po obratu izreka o izmeničnih kotih. Podobno sta t_B in t_D vzporednici, ki ju seka prečnica p tako, da sta kota $\angle ABE$ in $\angle CDF$ skladna po obratu izreka o izmeničnih kotih. Ker je tudi $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, po izreku KSK sledi, da je $\triangle ABE \cong \triangle CDF$. Torej je $\overline{AE} \cong \overline{CF}$. Daljici $\overline{A'B'}$ in \overline{AE} sta nasprotni stranici paralelograma, torej sta skladni. Podobno sta $\overline{C'F}$ in $\overline{C'D'}$ nasprotni stranici paralelograma in zato skladni. Iz tega sledi $\overline{A'B'} \cong \overline{C'D'}$. \square

Lema 71. Naj bosta x in y realni števili. Denimo, da velja:

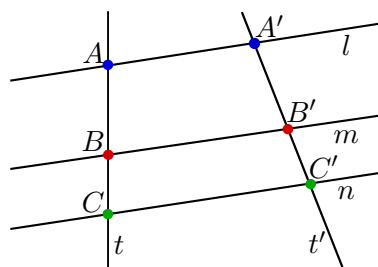
- (1) vsako racionalno število, ki je manjše od x , je tudi manjše od y .
- (2) vsako racionalno število, ki je manjše od y , je tudi manjše od x .

Tedaj je $x = y$.

Dokaz Izvedemo dokaz z analizo primerov. 1. *možnost*: Denimo, da je $x < y$. Tedaj obstaja število $r \in \mathbb{Q}$, za katero velja $x < r < y$, kar je v nasprotju z (2).

2. *možnost*: Denimo, da je $y < x$. Tedaj obstaja število $r \in \mathbb{Q}$, za katero velja $y < r < x$, kar je v nasprotju z (1).

Torej velja 3. *možnost*: $x = y$. \square



Slika 4.3: Izrek o vzporedni projekciji

Izrek 72 (Izrek o vzporedni projekciji). Naj bodo l , m in n tri vzporedne premice, ki jih dve skupni prečnici t oz. t' zaporedoma sekata v točkah A , B , C oz. A' , B' , C' . Če velja $A * B * C$, tedaj je $\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'}$.

Dokaz Označimo $x = \frac{BC}{AB}$ in $y = \frac{B'C'}{A'B'}$. Izberimo poljubni naravni števili p in q . Daljico \overline{AB} razdelimo na q skladnih daljic, torej poiščemo točke $A = A_0, A_1, \dots, A_q = B$, tako da velja $A_0 * A_1 * \dots * A_q$ in $A_i A_{i+1} = \frac{AB}{q}$ za $i = 0, 1, \dots, q-1$. Nato poiščemo še točke $B = B_0, B_1, \dots, B_p$ na poltraku \overrightarrow{BC} , tako da velja $B_0 * B_1 * \dots * B_p$ in $B_i B_{i+1} = \frac{AB}{q}$ za

$i = 0, 1, \dots, p - 1$. Označimo z A'_i (oz. B'_i) vzporedno projekcijo točke A_i (oz. B_i) na premico t' v smeri p . Velja

$$\frac{BB_p}{AB} = \frac{p}{q}$$

in ker vzporedna projekcija ohranja skladnost daljic, sledi $\frac{B'B'_p}{A'B'} = \frac{p}{q}$.

- Denimo, da je $\frac{p}{q} < x = \frac{BC}{AB}$, tedaj sledi $p \cdot \frac{AB}{q} < BC$ in $BB_p < BC$ oziroma $B * B_p * C$. Ker vzporedna projekcija ohranja vmesnost, dobimo $B'B'_p < B'C'$ in $p \cdot \frac{A'B'}{q} < B'C'$ oziroma $\frac{p}{q} < \frac{B'C'}{A'B'}$. Torej iz $\frac{p}{q} < x$ sledi $\frac{p}{q} < y$.
- S podobnim sklepanjem dokažemo, da iz $\frac{p}{q} < y$ sledi $\frac{p}{q} < x$.

Po Lemi 71 dobimo, da je $x = y$. □

Posledica 73. Vzporedna projekcija ohranja razmerja dolžin daljic.

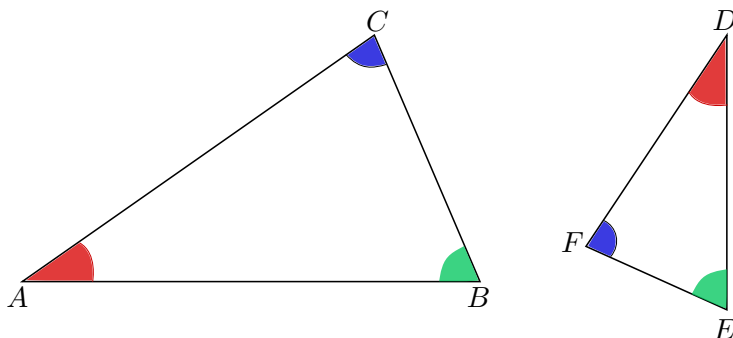
4.2 Podobnost trikotnikov

Definicija. Trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$ sta **podobna**, če obstaja bijektivna funkcija $f: \{A, B, C\} \rightarrow \{D, E, F\}$, za katero velja $\angle ABC \cong \angle f(A)f(B)f(C)$, $\angle BCA \cong \angle f(B)f(C)f(A)$ in $\angle CAB \cong \angle f(C)f(A)f(B)$.

Podobna trikotnika imata torej paroma skladne vse tri notranje kote, pri čemer je seveda pomembno, kateri notranji koti so paroma skladni. Podobno kot pri oznaki skladnosti se dogovorimo, da bomo bijekcijo f v zgornji definiciji implicitno zapisali v oznaki podobnosti dveh trikotnikov. Oznaka

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

naj pomeni, da bijekcija $f: \{A, B, C\} \rightarrow \{D, E, F\}$ s predpisom $f(A) = D$, $f(B) = E$, $f(C) = F$ določa podobnost trikotnikov $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$.



Slika 4.4: Podobna trikotnika: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

Trditev 74. Če imata trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$ dva para skladnih notranjih kotov, sta podobna.

Dokaz Brez škode za splošnost privzemimo, da velja $\angle ABC \cong \angle DEF$ in $\angle BCA \cong \angle EFD$. Po izreku o vsoti notranjih kotov sledi $\mu(\angle CAB) = 180 - \mu(\angle ABC) - \mu(\angle BCA) = 180 - \mu(\angle DEF) - \mu(\angle EFD) = \mu(\angle FDE)$, torej je tudi $\angle CAB \cong \angle FDE$. \square

Izrek 75 (Izrek o podobnih trikotnikih). Če je $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, potem velja

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}.$$

Dokaz Naj bosta $E' \in \overrightarrow{AB}$ in $F' \in \overrightarrow{AC}$ točki, za kateri velja $AE' = DE$ in $AF' = DF$. Po aksiomu SKS velja $\triangle AE'F' \cong \triangle DEF$ in posledično $\angle AE'F' \cong \angle DEF \cong \angle ABC$. Po izreku o izmeničnih kotih sta premici $\overleftrightarrow{E'F'}$ in \overleftrightarrow{BC} vzporedni. Vzporedna projekcija premice \overleftrightarrow{AB} na premico \overleftrightarrow{AC} v smeri \overleftrightarrow{BC} točke A , E' in B zaporedoma preslika v A , F' in C . Ker vzporedna projekcija ohranja razmerja dolžin daljic, velja $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$ oziroma $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$. Na podoben način pokažemo, da velja tudi $\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$. \square

Izrek 76 (SSS za podobne trikotnike). Če za trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$ velja $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$, potem je $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Dokaz Naj bo $E' \in \overrightarrow{AB}$ točka, za katero velja $AE' = DE$. Naj bo p vzporednica k premici \overleftrightarrow{BC} skozi točko E' . Če bi bila premica p vzporedna s premico \overleftrightarrow{AC} , potem bi sledilo $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AC}$, kar ni res. Torej premica p seka premico \overleftrightarrow{AC} v neki točki F' . Po obratu izreka o izmeničnih kotih velja $\angle AE'F' \cong \angle ABC$ in $\angle AF'E' \cong \angle ACB$, torej je $\triangle AE'F' \sim \triangle ABC$. Po izreku o podobnih trikotnikih (Izrek 75) sledi $\frac{AE'}{AB} = \frac{E'F'}{BC} = \frac{AF'}{AC}$ in ker je $AE' = DE$, dobimo $E'F' = \frac{BC \cdot DE}{AB} = EF$ ter $AF' = \frac{AC \cdot DE}{AB} = DF$. Po izreku SSS sledi, da je $\triangle AE'F' \cong \triangle DEF$. Torej so notranji koti trikotnikov $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$ paroma skladni in velja $\triangle DEF \sim \triangle ABC$. \square

Izrek 77 (Izrek SKS za podobne trikotnike). Če za trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$ velja $\angle ABC \cong \angle DEF$ in $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$, potem je $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Dokaz Naj bo $D' \in \overrightarrow{BA}$ točka, za katero velja $D'B = DE$. Naj bo p vzporednica k premici \overleftrightarrow{AC} skozi točko D' . Premica p seka premico \overleftrightarrow{BC} v točki F' . Po obratu izreka o izmeničnih kotih velja $\angle CAB \cong \angle F'D'B$ in $\angle BCA \cong \angle BF'D'$, torej je $\triangle ABC \sim \triangle D'BF'$. Po izreku o podobnih trikotnikih sledi $\frac{AB}{D'B} = \frac{BC}{BF'} = \frac{AC}{D'F'}$ in ker je $D'B = DE$, sledi $BF' = \frac{BC \cdot DE}{AB} = EF$. Po aksiomu SKS sledi $\triangle D'BF' \cong \triangle DEF$ in dobimo $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. \square

4.3 Pitagorov izrek

Izrek 78 (Pitagorov izrek). V pravokotnem trikotniku je kvadrat dolžine hipotenuze enak vsoti kvadratov dolžin obeh katet.

Dokaz Naj bo $\triangle ABC$ pravokotni trikotnik s pravim kotom $\angle BCA$. Naj bo D nožišče višine na hipotenuzo \overline{AB} . Po Posledici 59 je hipotenuza najdaljša od stranic trikotnika $\triangle ABC$, zato po Trditvi 60 velja $A * D * C$. Trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle ACD$ imata dva

para skladnih notranjih kotov $\angle CAB = \angle CAD$ in $\angle BCA \cong \angle CDA$, zato po trditvi 74 sledi $\triangle ABC \sim \triangle ACD$. Trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle CBD$ imata dva para skladnih notranjih kotov $\angle ABC = \angle CBD$ in $\angle BCA \cong \angle BDC$, zato po trditvi 74 sledi $\triangle ABC \sim \triangle CBD$. Po izreku o podobnih trikotnikih dobimo $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$ in $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$, iz česar izračunamo $AC^2 = AB \cdot AD$ in $BC^2 = AB \cdot BD$. Uporabimo še dejstvo, da je $A * D * B$ in tako $AB = AD + DB$, pa dobimo $AC^2 + BC^2 = AB(AD + BD) = AB^2$. \square

Trditev 79. Če za dolžine stranic a , b in c nekega trikotnika velja $a^2 + b^2 = c^2$, potem je to pravokotni trikotnik s pravim kotom nasproti stranice dolžine c .

Dokaz Naj bo $\triangle ABC$ trikotnik z dolžinami stranic $AB = c$, $BC = a$ in $AC = b$, za katerega velja $a^2 + b^2 = c^2$. Naj bo $\angle E'FD'$ pravi kot in naj bosta $E \in \overrightarrow{FE'}$ ter $D \in \overrightarrow{FD'}$ točki, za kateri velja $EF = a$ ter $DF = b$. Potem po Pitagorovem izreku za trikotnik $\triangle DEF$ velja $DE = \sqrt{a^2 + b^2} = c$ in po izreku SSS sledi $\triangle DEF \cong \triangle ABC$. Torej je $\triangle ABC$ pravokotni trikotnik s pravim kotom $\angle BCA$. \square

Definicija. Naj bosta x in y pozitivni realni števili. **Geometrijska sredina** števil x in y je definirana kot \sqrt{xy} .

Opomba 15. Izraz geometrijska sredina izhaja iz ploščine preprostih likov. Ploščina pravokotnika dolžine x in širine y je enaka kot ploščina kvadrata s stranico dolžine \sqrt{xy} . S ploščino se bomo natančneje ukvarjali v naslednjem poglavju.

Izrek 80 (Višinski izrek). Višina na hipotenuzo pravokotnega trikotnika je geometrijska sredina dolžin projekcij katet na hipotenuzo.

Dokaz Naj bo $\triangle ABC$ pravokotni trikotnik s pravim kotom $\angle BCA$ in označimo z D nožišče na hipotenuzo \overline{AB} . Ker je hipotenuza najdaljša od stranic trikotnika $\triangle ABC$ (Posledica 59), po Trditvi 60 velja $A * D * C$. Trikotniki $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ in $\triangle CBD$ imajo po dva para skladnih notranjih kotov (glejte dokaz Pitagorovega izreka) in so posledično podobni. Po izreku o podobnih trikotnikih za trikotnika $\triangle ACD$ in $\triangle CBD$ dobimo $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$, iz česar sledi $CD^2 = AD \cdot BD$ oziroma $CD = \sqrt{AD \cdot BD}$. \square

Izrek o podobnih trikotnikih in Pitagorov izrek predstavljata osnovo trigonometrije. Oglejmo si osnovne definicije trigonometričnih funkcij.

Definicija. Naj bo θ ostri kot z vrhom v točki A . Izberimo točko B na enem od krakov kota in pravokotno projekcijo te točke na drugi krak označimo s C . Sinusno in kosinusno funkcijo definiramo z

$$\sin \theta = \frac{BC}{AB} \quad \text{in} \quad \cos \theta = \frac{AC}{AB}.$$

Če je θ' topi kot, označimo s θ njemu suplementarni kot in definiramo $\sin \theta' = \sin \theta$ ter $\cos \theta' = -\cos \theta$. Če je ϕ pravi kot, definiramo $\sin \phi = 1$ in $\cos \phi = 0$.

Lahko je razmisliti, da so kotne funkcije na ta način dobro definirane (neodvisne od izbire točk B oz. C). Iz Pitagorovega izreka sledi ti. Pitagorova identiteta:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 .$$

Dva izmed pomembnejših izrekov v trigonometriji sta tudi sinusni in kosinusni izrek.

Izrek 81 (Sinusni izrek). V poljubnem trikotniku ΔABC velja

$$\frac{BC}{\sin(\angle CAB)} = \frac{AC}{\sin(\angle ABC)} = \frac{AB}{\sin(\angle BCA)} .$$

Dokaz Naj bo ΔABC poljuben trikotnik, ter označimo z D nožišče višine na stranico \overline{AB} . Tedaj sta ΔADC in ΔBDC pravokotna trikotnika s pravim kotom pri oglišču D . Uporabimo dokaz z analizo primerov. 1. *možnost*: Če je $A * D * B$, potem velja $\sin(\angle CAB) = \sin(\angle CAD) = \frac{CD}{AC}$ in $\sin(\angle ABC) = \sin(\angle DBC) = \frac{CD}{BC}$, torej je $\frac{BC}{\sin(\angle CAB)} = \frac{AC}{\sin(\angle ABC)}$.

2. *možnost*: Če je $D * A * B$, potem sta $\angle CAB$ in $\angle CAD$ suplementarna kota, zato spet velja $\sin(\angle CAB) = \sin(\angle CAD) = \frac{CD}{AC}$ in $\sin(\angle ABC) = \sin(\angle DBC) = \frac{CD}{BC}$, torej je $\frac{BC}{\sin(\angle CAB)} = \frac{AC}{\sin(\angle ABC)}$.

3. *možnost*: Če je $A * B * D$, potem sta $\angle ABC$ in $\angle DBC$ suplementarna kota, zato $\sin(\angle CAB) = \sin(\angle CAD) = \frac{CD}{AC}$ in $\sin(\angle ABC) = \sin(\angle DBC) = \frac{CD}{BC}$, torej je $\frac{BC}{\sin(\angle CAB)} = \frac{AC}{\sin(\angle ABC)}$.

4. *možnost*: Če je $D = A$, je $\angle CAB$ pravi kot in dobimo $\sin(\angle CAB) = 1 = \frac{DC}{AC}$, $\sin(\angle ABC) = \frac{DC}{BC}$ in posledično $\frac{AC}{\sin(\angle ABC)} = \frac{BC}{\sin(\angle CAB)}$.

5. *možnost*: Če je $D = B$, je $\angle ABC$ pravi kot in dobimo $\sin(\angle ABC) = 1 = \frac{DC}{BC}$, $\sin(\angle CAB) = \frac{DC}{AC}$ in posledično $\frac{AC}{\sin(\angle ABC)} = \frac{BC}{\sin(\angle CAB)}$.

Enakost $\frac{AC}{\sin(\angle ABC)} = \frac{AB}{\sin(\angle BCA)}$ dokažemo podobno. \square

Izrek 82 (Kosinusni izrek). V poljubnem trikotniku ΔABC velja

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos(\angle BCA) .$$

Dokaz Označimo z D nožišče višine na stranico \overline{BC} trikotnika ΔABC . Denimo najprej, da velja $B * D * C$. Tedaj v pravokotnem trikotniku ΔACD dobimo $\cos(\angle BCA) = \cos(\angle DCA) = \frac{CD}{AC}$ oziroma $CD = AC \cdot \cos(\angle BCA)$. Z uporabo Pitagorovega izreka v pravokotnih trikotnikih ΔABD in ΔACD dobimo

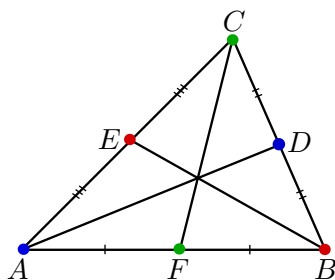
$$\begin{aligned} AB^2 &= AD^2 + BD^2 = AC^2 - CD^2 + BD^2 = AC^2 + (BD + CD)(BD - CD) = \\ &= AC^2 + BC(BD - CD) = AC^2 + BC(BC - 2CD) = \\ &= AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos(\angle BCA) . \end{aligned}$$

V ostalih primerih je dokaz podoben.

4.4 Evklidska geometrija trikotnikov

Evklidska geometrija se v času po Evklidu ni nehala razvijati. V stoletjih in tisočletjih po nastanku Elementov so številni matematiki raziskovali evklidsko geometrijo in našli veliko novih presenetljivih rezultatov. Številni slavni izreki moderne evklidske geometrije so bili odkriti v devetnajstem stoletju.

Definicija. Tri premice so **konkurentne**, če se vse tri sekajo v eni sami točki. Tri daljice so **konkurentne**, če se vse tri sekajo v eni sami točki, ki ni krajišče nobene izmed daljic. Daljica, katere krajišči sta oglišče trikotnika in razpolovišče nasprotne stranice, se imenuje **težiščnica** trikotnika.



Slika 4.5: Težiščnice trikotnika

Izrek 83 (O konkurentnosti težiščnic). Če so D , E oz. F razpolovišča stranic nasproti oglišču A , B oz. C trikotnika ΔABC , potem se težiščnice \overline{AD} , \overline{BE} in \overline{CF} sekajo v eni sami točki T in velja $AT = 2TD$, $BT = 2TE$ ter $CT = 2TF$.

Dokaz Dokažimo najprej, da se poljubni dve težiščnici sekata. Ker je točka D razpolovišče stranice \overline{BC} , velja $B * D * C$ in D leži v notranjosti kota $\angle BAC = \angle FAC$. Po izreku o prečki poltrak \overrightarrow{AD} seka težiščnico \overline{CF} . Ker je tudi $A * F * B$, točka F leži v notranjosti kota $\angle BCA = \angle DCA$ in poltrak \overrightarrow{CF} seka težiščnico \overline{AD} . Ker se nosilki težiščnic \overline{AD} in \overline{CF} sekata kvečjemu v eni točki, iz zgornjega sledi, da se v tej točki T sekata težiščnici \overline{AD} in \overline{CF} .

Trikotnika ΔABC in ΔFBD imata skupen kot $\angle ABC = \angle FBD$ in enako razmerje dolžin stranic $\frac{AB}{BC} = \frac{FB}{BD}$, zato po izreku SKS za podobne trikotnike velja $\Delta ABC \sim \Delta FBD$. Torej je kot $\angle DFB$ skladen s kotom $\angle CAB$ in po izreku o izmeničnih kotih sledi, da je premica \overrightarrow{FD} vzporedna s premico \overrightarrow{AC} . Po izreku o podobnih trikotnikih velja tudi $\frac{AB}{FB} = \frac{AC}{FD}$, torej je $FD = \frac{AC}{2}$. Trikotnika ΔATC in ΔDTF imata skladna sovršna notranja kota $\angle ATC \cong \angle DTF$ ter skladna notranja kota $\angle CAT \cong \angle FDT$ (po obratu izreka o izmeničnih kotih), zato je $\Delta ATC \sim \Delta DTF$. Po izreku o podobnih trikotnikih dobimo $\frac{AT}{DT} = \frac{TC}{TF} = \frac{AC}{DF} = 2$. Torej velja $AT = 2TD$ in $CT = 2TF$. Ker točka T leži v notranjosti kota $\angle ABC$, poltrak \overrightarrow{BT} po izreku o prečki seka stranico \overline{AC} v neki točki G in daljico \overline{DF} v neki točki U . Trikotnika ΔABG in ΔFBU imata skupni kot $\angle ABG = \angle FBU$ ter skladna kota $\angle GAB \cong \angle UFB$ (po obratu izreka o izmeničnih kotih), zato je $\Delta ABG \sim \Delta FBU$ in po izreku o podobnih trikotnikih velja $\frac{AB}{FB} = \frac{AG}{FU} = 2$.



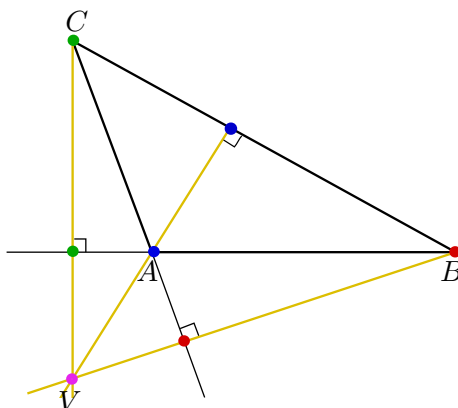
Slika 4.6: Dokaz izreka o konkurentnosti težiščnic: prvi del (levo), drugi del (desno)

Trikotnika $\triangle GTC$ in $\triangle UTF$ imata skladna sovršna kota $\angle GTC \cong \angle UTF$ ter skladna kota $\angle TCG \cong \angle TFU$ po obratu izreka o izmeničnih kotih, zato je $\triangle GTC \sim \triangle UTF$ in po izreku o podobnih trikotnikih dobimo $\frac{GC}{UF} = \frac{TC}{TF} = 2$. Torej je $AG = 2FU = GC$, kar pomeni, da je točka G razpolovišče stranice \overline{AC} oziroma $G = E$. S tem smo dokazali, da se vse tri težiščnice trikotnika $\triangle ABC$ sekajo v eni točki T .

Trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle AFG$ imata skupen notranji kot pri oglišču A in enako razmerje dolžin stranic $\frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AG}$, zato po izreku SKS za podobne trikotnike velja $\triangle ABC \sim \triangle AFG$. Torej je kot $\angle AFG$ skladen s kotom $\angle ABC$ in po izreku o izmeničnih kotih sledi, da sta premici \overrightarrow{FG} in \overrightarrow{BC} vzporedni. Po obratu izreka o izmeničnih kotih lahko sklepamo, da sta izmenična notranja kota $\angle TGF$ in $\angle TBC$ skladna ter kota $\angle TFG$ in $\angle TCB$ skladna, zato je $\triangle TFG \sim \triangle TCB$. Po izreku o podobnih trikotnikih sklepamo, da je $\frac{TF}{TC} = \frac{GT}{BT} = \frac{1}{2}$. Torej je $BT = 2GT = 2ET$. \square

Presečišče vseh treh težiščnic trikotnika imenujemo **težišče** trikotnika in ga običajno označimo s T . To je ena od znamenitih točk v notranjosti trikotnika.

Trditev 84. Nosilke vseh treh višin poljubnega trikotnika v evklidski geometriji so konkurentne.



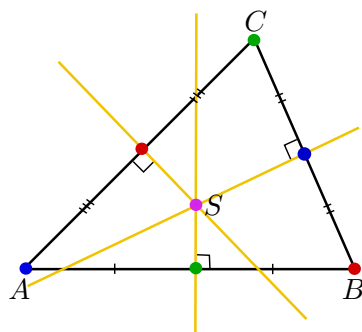
Slika 4.7: Višinska točka trikotnika

Presečišče nosilk višin trikotnika imenujemo **višinska točka** in jo običajno označimo z V . To je še ena pomembna točka trikotnika. Naslednja pomembna točka je presečišče simetral stranic.

Izrek 85. Vse tri simetrale stranic poljubnega trikotnika se sekajo v eni sami točki, ki je enako oddaljena od vseh treh oglišč trikotnika.

Dokaz Označimo z $s_{\overline{AB}}$ simetralo stranice \overline{AB} in z $s_{\overline{BC}}$ simetralo stranice \overline{BC} trikotnika $\triangle ABC$. Denimo, da se simetrali ne bi sekali; ker je $s_{\overline{AB}} \perp \overrightarrow{AB}$ in $s_{\overline{BC}} \perp \overrightarrow{BC}$, bi iz tega po Trditvi 67 (3.) sledilo, da sta nosilki stranic \overline{AB} in \overline{BC} bodisi enaki bodisi vzporedni in dobimo protislovje z dejstvom, da so točke A , B in C nekolinearne. Torej se $s_{\overline{AB}}$ in $s_{\overline{BC}}$ sekata v neki točki S . Po izreku o karakterizaciji simetrale daljice (Izrek 49) velja $AS = BS = CS$. Označimo z D razpolovišče stranice \overline{AC} . Tedaj sta $\triangle ADS$ in $\triangle CDS$ skladna trikotnika po izreku SSS, zato sta tudi njuna notranja kota $\angle ADS$ in $\angle CDS$ skladna. Ker sta to obenem sokota, sta suplementarna in posledično prava kota. Torej je premica \overleftrightarrow{DS} simetrala stranice \overline{AC} . S tem smo dokazali, da se vse tri simetrale stranic trikotnika sekajo v eni sami točki, ki je enako oddaljena od vseh treh oglišč. \square

Iz izreka 85 sledi, da je presečišče simetral stranic trikotnika središče krožnice, na kateri ležijo vsa tri oglišča. To krožnico imenujemo **očrtana krožnica** trikotnika (krožnice bomo natančneje spoznali v poglavju ??).



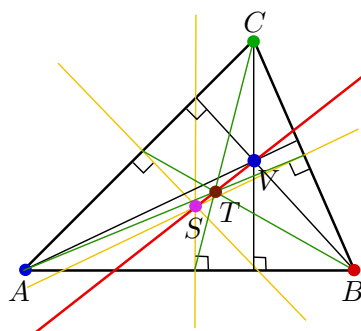
Slika 4.8: Središče očrtane krožnice trikotnika

Izrek 86 (Izrek o Eulerjevi premici). Višinska točka V , središče očrtane krožnice S in težišče T poljubnega trikotnika so kolinearne točke. Če trikotnik ni enakostraničen, potem točka T leži med V in S tako, da je $VT = 2TS$.

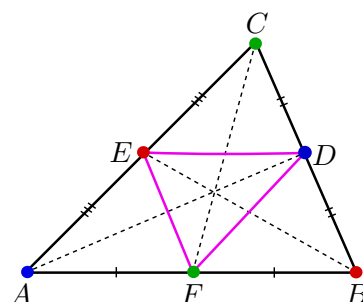
Premico, na kateri ležijo točke V , T in S , imenujemo **Eulerjeva premica** trikotnika po znamenitem matematiku Leonardu Eulerju, ki je izrek 86 odkril v osemnajstem stoletju.

Posebne točke trikotnika pa so povezane tudi z novimi zanimivimi trikotniki. Če z D , E in F označimo razpolovišča stranic nasproti oglišč A , B oz. C trikotnika $\triangle ABC$, potem trikotnik $\triangle DEF$ imenujemo **medialni trikotnik** trikotnika $\triangle ABC$. Opazujte posebne točke (težišče, višinska točka oz. središče očrtane krožnice) obeh trikotnikov. Ali najdete kakšne medsebojne povezave?

Če so nožišča višin na posamezne stranice trikotnika $\triangle ABC$ nekolinearne točke, določajo oglišča ti. **višinskega trikotnika**. Razmislite, kdaj obstaja višinski trikotnik danega trikotnika in kaj lahko o njem povemo.

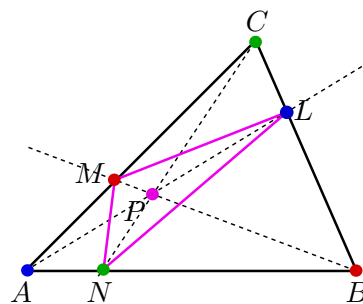


Slika 4.9: Eulerjeva premica trikotnika



Slika 4.10: Medialni trikotnik

Konstrukciji medialnega in višinskega trikotnika sta posebna primera sledeče bolj splošne konstrukcije. Narišimo nosilke stranic trikotnika $\triangle ABC$ in izberimo točko P , ki ne leži na nobeni od teh nosilk. Označimo z L točko, v kateri premica \overleftrightarrow{AP} seka nosilko \overleftrightarrow{BC} , naj bo M točka, v kateri premica \overleftrightarrow{BP} seka nosilko \overleftrightarrow{AC} in naj bo N točka, v kateri premica \overleftrightarrow{CP} seka nosilko \overleftrightarrow{AB} . Trikotnik $\triangle LMN$ se imenuje **Cevov trikotnik** začetnega trikotnika $\triangle ABC$. Medialni trikotnik je torej posebni primer Cevovega trikotnika, v katerem je P težišče trikotnika $\triangle ABC$.



Slika 4.11: Cevov trikotnik trikotnika $\triangle ABC$

Cevovi trikotniki se imenujejo po italijanskem matematiku Giovanniiju Cevi, ki je ob raziskovanju teh trikotnikov odkril pomemben odnos med razdaljami oglišč Cevovega trikotnika do oglišč začetnega trikotnika.

Definicija. Cevova premica trikotnika $\triangle ABC$ je premica, ki vsebuje natanko eno od

oglišč trikotnika in seka nosilko tiste stranice, ki je temu oglišču nasprotna. **Menelajeva točka** trikotnika $\triangle ABC$ je točka, ki leži na nosilki ene od stranic trikotnika in ni enaka nobenemu od oglišč.

Definicija. Za tri kolinearne točke A, B in T definiramo **uteženo razmerje** $\widehat{\frac{AT}{TB}}$ s predpisom:

$$\widehat{\frac{AT}{TB}} = \begin{cases} \frac{AT}{TB}, & \text{če velja } A * T * B, \\ -\frac{AT}{TB}, & \text{če velja } T * A * B \text{ ali } A * B * T. \end{cases}$$

Lema 87. Naj bosta A in B dve različni točki. Za poljubno realno število $x \neq -1$ obstaja enolično določena točka $X \in \overleftrightarrow{AB}$, za katero velja $\widehat{\frac{AX}{XB}} = x$. Za nobeno točko $X \in \overleftrightarrow{AB}$ ne velja $\widehat{\frac{AX}{XB}} = -1$.

Dokaz Označimo dolžino daljice \overline{AB} z $d = AB$; torej velja $d > 0$. Po umeritvi premice (Posledica 8) obstaja koordinatni sistem $f: \overleftrightarrow{AB} \rightarrow \mathbb{R}$, v katerem je koordinata točke A enaka 0 in koordinata točke B pozitivno število, torej je $f(B) = d$. Naj bo x poljubno realno število. Izvedemo dokaz z analizo primerov.

- Če je $x = 0$, tedaj je edina točka $X \in \overleftrightarrow{AB}$, za katero velja $\widehat{\frac{AX}{XB}} = x$, točka $X = A$.
- Denimo, da je $x > 0$. Če za neko točko $X \in \overleftrightarrow{AB}$ velja $\widehat{\frac{AX}{XB}} = x$, po definiciji uteženega razmerja sledi $A * X * B$ in torej $AX + XB = d$ ter $f(X) > 0$. Izračunamo

$$AX + \frac{AX}{x} = d \quad \Rightarrow \quad AX = \frac{xd}{x+1} \quad \Rightarrow \quad X = f^{-1}\left(\frac{dx}{x+1}\right).$$

- Denimo sedaj, da je $-1 < x < 0$. Če za točko $X \in \overleftrightarrow{AB}$ velja $\widehat{\frac{AX}{XB}} = x$, sledi $\frac{AX}{XB} < 1$ in $X * A * B$. Torej dobimo

$$AX + AB = XB \quad \Rightarrow \quad AX + d = \frac{AX}{x} \quad \Rightarrow \quad AX = \frac{dx}{1-x} \quad \Rightarrow \quad X = f^{-1}\left(\frac{dx}{1-x}\right).$$

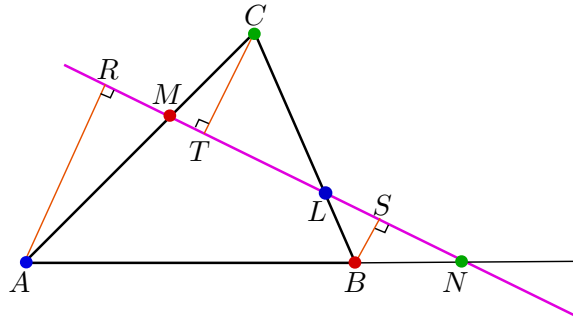
- Oglejmo si še primer, da je $x < -1$. Če za točko $X \in \overleftrightarrow{AB}$ velja $\widehat{\frac{AX}{XB}} = x$, sledi $\frac{AX}{XB} > 1$ in $A * B * X$. Torej dobimo

$$AB + BX = AX \quad \Rightarrow \quad d + \frac{AX}{x} = AX \quad \Rightarrow \quad AX = \frac{dx}{x-1} \quad \Rightarrow \quad X = f^{-1}\left(\frac{dx}{x-1}\right).$$

- Naj bo sedaj $x = -1$ in denimo, da bi za neko točko $X \in \overleftrightarrow{AB}$ veljalo $\widehat{\frac{AX}{XB}} = x$. Po definiciji uteženega razmerja točka X ne leži na daljici \overline{AB} , obenem pa je enako oddaljena od točk A in B , saj velja $\frac{AX}{XB} = 1$. Po izreku o karakterizaciji simetralne daljice (Izrek 49) sledi, da točka X leži na simetrali daljice \overline{AB} . Ker simetrala daljice seka nosilko te daljice le v njenem razpolovišču, dobimo protislovje. Torej točka $X \in \overleftrightarrow{AB}$, za katero bi veljalo $\widehat{\frac{AX}{XB}} = -1$, ne obstaja. \square

Izrek 88 (Menelajev izrek). Naj bodo L , M in N zaporedoma izbrane točke na nosilkah stranic \overline{BC} , \overline{AC} in \overline{AB} trikotnika $\triangle ABC$, ki so različne od oglišč trikotnika. Menelajeve točke L , M in N so kolinearne natanko tedaj, ko velja

$$\frac{\widehat{AN}}{\widehat{NB}} \cdot \frac{\widehat{BL}}{\widehat{LC}} \cdot \frac{\widehat{CM}}{\widehat{MA}} = -1.$$



Slika 4.12: Skica k dokazu Menelajevga izreka (prvi del)

Dokaz (\Rightarrow) Predpostavimo, da so L , M in N kolinearne točke, ter označimo s p premico, na kateri ležijo. Ker premica p vsako od nosilk stranic trikotnika seka v natanko eni točki, nobeno oglišče trikotnika ne leži na p . Torej vsaj dve oglišči trikotnika ležita na istem bregu premice p in posledično tudi stranica s krajiščema v teh ogliščih leži na istem bregu. Premica p torej seka natanko dve stranici trikotnika v primeru, ko tretje oglišče trikotnika leži na drugem bregu premice p , v nasprotnem primeru pa p ne seka nobene od stranic trikotnika. To pomeni, da je produkt uteženih razmerij $\frac{\widehat{AN}}{\widehat{NB}} \cdot \frac{\widehat{BL}}{\widehat{LC}} \cdot \frac{\widehat{CM}}{\widehat{MA}}$ v vsakem primeru negativno število.

Denimo, da premica p seka dve stranici trikotnika. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da sta to stranici \overline{AC} in \overline{BC} ter da velja $A * B * N$. Označimo zaporedoma z R , S oz. T nožišča pravokotnic k premici p skozi točke A , B oz. C . Po Trditvi 50 so premice \overleftrightarrow{AR} , \overleftrightarrow{BS} in \overleftrightarrow{CT} paroma vzporedne. Trikotnika $\triangle ANR$ in $\triangle BNS$ imata skupni kot $\angle ANR = \angle BNS$ in skladna prava kota $\angle NRA \cong \angle NSB$, zato sta po Trditvi 74 podobna. Po izreku o podobnih trikotnikih velja $\frac{AN}{NB} = \frac{AR}{BS}$. Trikotnika $\triangle AMR$ in $\triangle CMT$ imata skladna sovršna kota $\angle AMR \cong \angle CMT$ in skladna prava kota $\angle MRA \cong \angle MTC$, zato sta po Trditvi 74 podobna in po izreku o podobnih trikotnikih sledi $\frac{AM}{MC} = \frac{AR}{CT}$. Trikotnika $\triangle BLS$ in $\triangle CLT$ imata skladna sovršna kota $\angle BLS \cong \angle CLT$ in skladna prava kota $\angle LSB \cong \angle LTC$, zato sta podobna in po izreku o podobnih trikotnikih sledi $\frac{BL}{LC} = \frac{BS}{CT}$. Tako lahko izračunamo

$$\frac{\widehat{AN}}{\widehat{NB}} \cdot \frac{\widehat{BL}}{\widehat{LC}} \cdot \frac{\widehat{CM}}{\widehat{MA}} = -\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -\frac{AR}{BS} \cdot \frac{BS}{CT} \cdot \frac{CT}{AR} = -1.$$

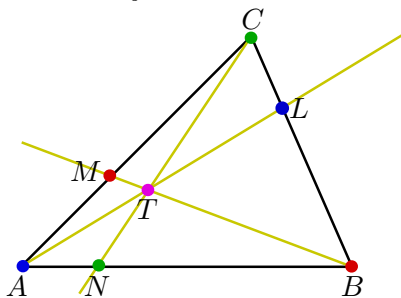
Denimo sedaj, da premica p ne seka nobene stranice trikotnika. Brez škode za splošnost predpostavimo, da velja $A * B * N$, $L * B * C$ in $C * A * M$. Označimo zaporedoma z R , S oz. T nožišča pravokotnic k premici p skozi točke A , B oz. C . Po Trditvi 50 so

premise \overleftrightarrow{AR} , \overleftrightarrow{BS} in \overleftrightarrow{CT} paroma vzporedne. Trikotnika $\triangle ANR$ in $\triangle BNS$ imata skupni kot $\angle ANR = \angle BNS$ in skladna prava kota $\angle NRA \cong \angle NSB$, zato sta po Trditvi 74 podobna. Po izreku o podobnih trikotnikih velja $\frac{AN}{NB} = \frac{AR}{BS}$. Trikotnika $\triangle AMR$ in $\triangle CMT$ imata skupni kot $\angle AMR = \angle CMT$ in skladna prava kota $\angle MRA \cong \angle MTC$, zato sta po Trditvi 74 podobna in po izreku o podobnih trikotnikih sledi $\frac{AM}{MC} = \frac{AR}{CT}$. Trikotnika $\triangle BLS$ in $\triangle CLT$ imata skupni kot $\angle BLS = \angle CLT$ in skladna prava kota $\angle LSB \cong \angle LTC$, zato sta podobna in po izreku o podobnih trikotnikih sledi $\frac{BL}{LC} = \frac{BS}{CT}$. Tako dobimo

$$\frac{\widehat{AN}}{NB} \cdot \frac{\widehat{BL}}{LC} \cdot \frac{\widehat{CM}}{MA} = -\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -\frac{AR}{BS} \cdot \frac{BS}{CT} \cdot \frac{CT}{AR} = -1.$$

(\Leftarrow) Denimo sedaj, da za točke L , M in N velja enakost $\frac{\widehat{AN}}{NB} \cdot \frac{\widehat{BL}}{LC} \cdot \frac{\widehat{CM}}{MA} = -1$. Označimo z l premico, ki vsebuje točki L in M , torej $l = \overleftrightarrow{LM}$. Če bi bila premica l vzporedna premici \overleftrightarrow{AB} , bi po izreku o vzporedni projekciji veljalo $\frac{BL}{LC} = \frac{AM}{MC}$ oziroma $\frac{\widehat{BL}}{LC} \cdot \frac{\widehat{CM}}{MA} = 1$, iz česar sledi $\frac{\widehat{AN}}{NB} = -1$ in po lemi 87 dobimo protislovje. Torej l seka premico \overleftrightarrow{AB} v neki točki N' . Tako so L , M in N' kolinearne Menelajeve točke trikotnika $\triangle ABC$ in po zgoraj dokazanem zanje velja enakost $\frac{\widehat{AN'}}{N'B} \cdot \frac{\widehat{BL}}{LC} \cdot \frac{\widehat{CM}}{MA} = -1$. Torej je $\frac{\widehat{AN'}}{N'B} = \frac{\widehat{AN}}{NB}$ in po Lemi 87 sledi $N' = N$. S tem smo dokazali, da so točke L , M in N kolinearne. \square

Konkurenca premic in kolinearnost točk sta pomembna primera dualnosti geometrijskih pojmov, po kateri naj bi se točke in premice obnašale simetrično glede na relacijo incidence. Če so tri točke kolinearne, rečemo, da so vse tri incidenčne z eno premico, medtem ko so tri premice konkurentne, kadar so vse tri incidenčne z eno točko. Sledечи izrek je v tem smislu "dualen" Menelajevemu izreku.



Slika 4.13: Skica k dokazu Cevovega izreka

Izrek 89 (Cevov izrek). Naj bo $\triangle ABC$ poljuben trikotnik. Naj bodo L , M in N zaporedoma izbrane točke na nosilkah stranic \overline{BC} , \overline{AC} in \overline{AB} trikotnika $\triangle ABC$, ki so različne od oglišč trikotnika. Cevove premice \overleftrightarrow{AL} , \overleftrightarrow{BM} in \overleftrightarrow{CN} so konkurentne ali pa paroma vzporedne natanko tedaj, ko velja

$$\frac{\widehat{AN}}{NB} \cdot \frac{\widehat{BL}}{LC} \cdot \frac{\widehat{CM}}{MA} = 1.$$

Dokaz (\Rightarrow) Denimo, da se vse tri Cevove premice sekajo v točki T . Oglejmo si trikotnik $\triangle ABL$. Točke N , C in T ležijo na nosilkah stranic trikotnika $\triangle ABL$ ter so različne od

oglišč tega trikotnika. Ker so N , C in T kolinearne, po Menelajevem izreku velja enakost

$$\frac{\widehat{AN}}{\widehat{NB}} \cdot \frac{\widehat{BC}}{\widehat{CL}} \cdot \frac{\widehat{LT}}{\widehat{TA}} = -1.$$

Če opazujemo še trikotnik $\triangle ALC$, lahko opazimo, da točke T , B in M ležijo na nosilkah njegovih stranic (ter so različne od njegovih oglišč). Ker so T , B in M kolinearne, po Menelajevem izreku velja enakost

$$\frac{\widehat{AT}}{\widehat{TL}} \cdot \frac{\widehat{LB}}{\widehat{BC}} \cdot \frac{\widehat{CM}}{\widehat{MA}} = -1.$$

Če pomnožimo levi in desni strani obeh enačb, dobimo

$$\frac{\widehat{AN}}{\widehat{NB}} \cdot \frac{\widehat{BL}}{\widehat{LC}} \cdot \frac{\widehat{CM}}{\widehat{MA}} = 1.$$

Denimo sedaj, da so Cevove premice paroma vzporedne. Tedaj natanko ena od njih leži med preostalima dvema in posledično seka stranico trikotnika s krajiščema v ogliščih, ki ju vsebujeta preostali dve Cevovi premici. Za preostali dve Cevovi premici po Posledici 23 velja, da ne sekata notranjosti nobene od stranic trikotnika $\triangle ABC$. Brez škode za splošnost privzemimo, da Cevova premica \overleftrightarrow{AL} leži med premicama \overleftrightarrow{BM} in \overleftrightarrow{CN} , torej velja $B * L * C$. Trikotnika $\triangle NBC$ in $\triangle ABL$ imata skupni kot $\angle NBC = \angle ABL$ in skladna notranja kota $\angle BCN \cong \angle BLA$ po obratu izreka o izmeničnih kotih, zato je $\triangle NBC \sim \triangle ABL$ in po izreku o podobnih trikotnikih velja $\frac{NB}{AB} = \frac{BC}{BL} = \frac{NC}{AL}$. Trikotnika $\triangle MBC$ in $\triangle ALC$ imata skupni kot $\angle BCM = \angle LCA$ in skladna notranja kota $\angle MBC \cong \angle ALC$ po obratu izreka o izmeničnih kotih, zato je $\triangle MBC \sim \triangle ALC$ in po izreku o podobnih trikotnikih velja $\frac{MC}{AC} = \frac{BC}{LC} = \frac{MB}{AL}$. Trikotnika $\triangle MBA$ in $\triangle CNA$ imata skladna sovršna kota $\angle BAM = \angle NAC$ in skladna izmenična kota $\angle MBA \cong \angle CNA$ po obratu izreka o izmeničnih kotih, zato je $\triangle MBA \sim \triangle CNA$ in po izreku o podobnih trikotnikih velja $\frac{MB}{CN} = \frac{BA}{NA} = \frac{MA}{CA}$. Iz tega lahko izračunamo $\frac{AN}{NB} = \frac{AN}{AB} \cdot \frac{AB}{NB} = \frac{CN}{MB} \cdot \frac{AL}{CN} = \frac{AL}{MB}$, $\frac{CM}{MA} = \frac{CM}{AC} \cdot \frac{AC}{MA} = \frac{MB}{AL} \cdot \frac{CN}{MB} = \frac{CN}{AL}$ in $\frac{BL}{LC} = \frac{BL}{BC} \cdot \frac{BC}{LC} = \frac{AL}{NC} \cdot \frac{MB}{AL} = \frac{MB}{NC}$ ter dobimo

$$\frac{\widehat{AN}}{\widehat{NB}} \cdot \frac{\widehat{BL}}{\widehat{LC}} \cdot \frac{\widehat{CM}}{\widehat{MA}} = \frac{AL}{MB} \cdot \frac{MB}{NC} \cdot \frac{CN}{AL} = 1.$$

(\Leftarrow) Predpostavimo, da velja enakost $\frac{\widehat{AN}}{\widehat{NB}} \cdot \frac{\widehat{BL}}{\widehat{LC}} \cdot \frac{\widehat{CM}}{\widehat{MA}} = 1$. Če Cevove premice \overleftrightarrow{AL} , \overleftrightarrow{BM} in \overleftrightarrow{CN} niso paroma vzporedne, tedaj lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da se \overleftrightarrow{AL} in \overleftrightarrow{BM} sekata v točki T . Naj bo N' točka, v kateri premica \overleftrightarrow{CT} seka premico \overleftrightarrow{AB} . Tedaj po dokazanem pri (\Rightarrow) velja enakost $\frac{\widehat{AN'}}{\widehat{N'B}} \cdot \frac{\widehat{BL}}{\widehat{LC}} \cdot \frac{\widehat{CM}}{\widehat{MA}} = 1$ in po Lemi 87 sledi $N' = N$. Torej se Cevove premice sekajo v točki T . \square

Izrek 90 (Izrek 30-60-90). Če so notranji koti trikotnika velikosti 30, 60 in 90, potem je hipotenuza dvakrat daljša od krajše katete tega trikotnika.

Dokaz Naj bo $\triangle ABC$ trikotnik, katerega notranji koti merijo $\mu(\angle BCA) = 30$, $\mu(\angle CAB) = 60$ in $\mu(\angle ABC) = 90$. Naj bo $D \in \overleftrightarrow{AB}$ točka, za katero velja $A * B * D$ in $AB = BD$. Potem sta $\triangle ABC$ in $\triangle DBC$ skladna pravokotna trikotnika po aksiomu SKS. Iz tega sledi, da

je $\mu(\angle BDC) = \mu(\angle BAC) = \mu(\angle DCA) = 60$. Po obratu izreka o enakokrakem trikotniku velja $AC = AD = AB + BD = 2AB$. \square

Izrek 91 (Obrat izreka 30-60-90). Če je v pravokotnem trikotniku hipotenuza dvakrat daljša od ene izmed katet, tedaj notranji koti tega trikotnika merijo 30, 60 in 90.

Dokaz Imejmo trikotnik $\triangle ABC$ s pravim kotom $\angle BCA$, v katerem velja $AB = 2BC$. Naj bo $D \in \overleftrightarrow{BC}$ točka, za katero velja $B * C * D$ in $BC = CD$. Tedaj sta $\triangle ABC$ in $\triangle ADC$ skladna trikotnika po aksiomu SKS, iz česar sledi $AB = AD = 2BC = BC + CD = BD$. Torej je $\triangle ABD$ enakostranični trikotnik, katerega notranji koti so paroma skladni in merijo 60. Po izreku o vsoti notranjih kotov trikotnika dobimo $\mu(\angle ABC) = 60$ in $\mu(\angle CAB) = 30$. \square

Poglavje 5

Večkotna področja in njihove ploščine

V tem poglavju si bomo ogledali preproste podmnožice ravnine, ki jih imenujemo večkotna področja. Povedali bomo, kako v evklidski geometriji aksiomatsko vpeljemo pojem ploščine.

Definicija. Notranjost trikotnika ΔABC je presek notranjosti vseh treh notranjih kotov:

$$\text{Int}(\Delta ABC) = \text{Int}(\angle CAB) \cap \text{Int}(\angle ABC) \cap \text{Int}(\angle BCA) .$$

Trikotno področje, ki ustreza trikotniku ΔABC , je množica

$$\blacktriangle ABC = \Delta ABC \cup \text{Int}(\Delta ABC) .$$

Stranice trikotnika imenujemo **robovi** trikotnega področja, oglišča trikotnika pa **oglišča** trikotnega področja.

Iz zgornje definicije sledi, da je notranjost trikotnika pravzaprav presek treh polravnin: polravnine H_C , ki je omejena s premico \overleftrightarrow{AB} in vsebuje točko C , polravnine H_A , ki je omejena s premico \overleftrightarrow{BC} in vsebuje točko A , ter polravnine H_B , ki je omejena s premico \overleftrightarrow{AC} in vsebuje točko B .

Večkotno področje (ali poligonalno področje) je podmnožica ravnine, ki jo lahko izrazimo kot unijo končnega števila trikotnih področij, pri čemer sta poljubni dve trikotni področji v tej uniji bodisi disjunktni bodisi je njun presek en rob ali eno oglišče obeh trikotnih področij. Dano večkotno področje lahko razdelimo na trikotna področja na več različnih načinov. Označimo z \mathcal{V} množico vseh večkotnih področij v ravnini. **Pravokotno področje** je unija pravokotnika in preseka notranjosti vseh notranjih kotov tega pravokotnika. Pravokotno področje, ki ustreza pravokotniku $\square ABCD$, označimo z $\blacksquare ABCD$.

A6 (Aksiom ploščine) Obstaja funkcija $\alpha: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, za katero velja:

1. $\alpha(R) > 0$ za poljubno večkotno področje R .
2. (skladnost) Če je $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, potem velja $\alpha(\blacktriangle ABC) = \alpha(\blacktriangle DEF)$.

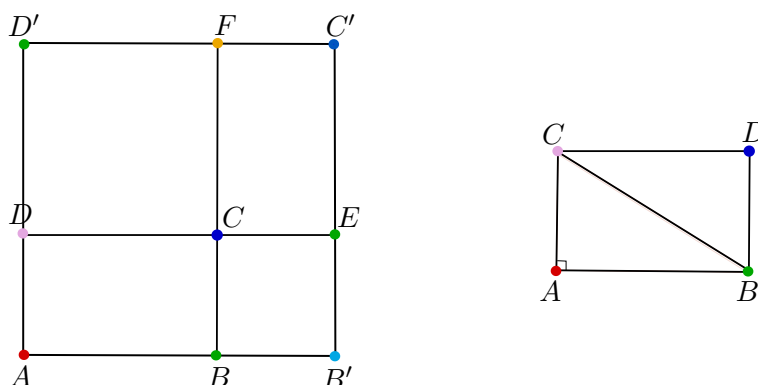
3. (aditivnost) Če sta R_1 in R_2 dve večkotni področji, katerih preseki so vsebovani v uniji robov in oglišč vsakega od njiju, tedaj velja $\alpha(R_1 \cup R_2) = \alpha(R_1) + \alpha(R_2)$.
4. Če je $\square ABCD$ kvadrat, tedaj je $\alpha(\blacksquare ABCD) = AB^2$.

Izrek 92. Naj bo $\square ABCD$ pravokotnik. Tedaj velja $\alpha(\blacksquare ABCD) = AB \cdot BC$.

Dokaz Naj bo $B' \in \overrightarrow{AB}$ točka, za katero velja $BB' = BC$. Naj bo $D' \in \overrightarrow{AD}$ točka, za katero velja $DD' = DC$. Naj bo C' točka na pravokotnici k premici \overleftrightarrow{AB} skozi točko B' , za katero je $B'C' = AB + BC$. Potem je $\square AB'C'D'$ kvadrat s stranico dolžine $AB + BC$. Označimo z E presečišče premic \overleftrightarrow{DC} in $\overleftrightarrow{B'C'}$ ter s F presečišče premic $\overleftrightarrow{D'C'}$ in \overleftrightarrow{BC} . Kvadratno področje $AB'C'D'$ je unija dveh kvadratnih področij $\blacksquare BB'EC$ in $\blacksquare DCFD'$ ter dveh pravokotnih področij $\blacksquare ABCD$ in $\blacksquare CEC'F$. Ker so trikotniki $\triangle ABC$, $\triangle CDA$, $\triangle EC'F$ in $\triangle FCE$ paroma skladni, po aksiomu **A6** sledi $\alpha(\blacksquare ABCD) = \alpha(\triangle ABC) + \alpha(\triangle CDA) = \alpha(\triangle EC'F) + \alpha(\triangle FCE) = \alpha(\blacksquare CEC'F)$. Po aksiomu **A6** dobimo

$$(AB + BC)^2 = AB^2 + BC^2 + 2\alpha(\square ABCD),$$

iz česar sledi $\alpha(\blacksquare ABCD) = AB \cdot BC$. □



Slika 5.1: Izračun ploščine pravokotnika (levo) in pravokotnega trikotnika (desno)

Trditev 93. Ploščina pravokotnega trikotnika je polovica produkta dolžin njegovih katet.

Dokaz Imejmo pravokotni trikotnik $\triangle ABC$ s pravim kotom $\angle CAB$. Naj bo H polravnina, omejena s premico \overleftrightarrow{BC} , ki ne vsebuje točke A . Po aksiomu o kotomeru (konstrukcija kota) obstaja natanko en poltrak \overrightarrow{BE} , za katerega velja $E \in H$ in $\mu(\angle CBE) = \mu(\angle BCA)$. Po Izreku 18 obstaja natanko ena točka $D \in \overrightarrow{BE}$, za katero velja $BD = AC$. Trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle DCB$ imata skladni stranici $\overline{BC} \cong \overline{CB}$ in $\overline{CA} \cong \overline{BD}$ ter skladna vmesna kota $\angle BCA \cong \angle CBD$, zato sta skladna po aksiomu SKS. Po aksiomu ploščine **A6** sledi $\alpha(\triangle ABC) = \alpha(\triangle DCB)$. Po izreku o vsoti notranjih kotov trikotnika za trikotnik $\triangle ABC$ velja $\mu(\angle ABC) + \mu(\angle BCA) = \mu(\angle ABC) + \mu(\angle CBD) = 90$, saj je tretji notranji kot $\angle CAB$ pravi. Torej po aksiomu o kotomeru sledi $\mu(\angle ABD) = \mu(\angle ABC) + \mu(\angle CBD) = 90$. Podobno dobimo tudi $\mu(\angle DCA) = 90$. Kota $\angle CAB$ in $\angle BDC$ sta skladna in

zato oba prava. Torej ima štirikotnik $\square ABDC$ vse štiri notranje kote prave, zato je pravokotnik. Ploščina njemu ustreznega pravokotnega področja je po Izreku 92 enaka $AB \cdot AC$. Ker je to pravokotno področje unija trikotnih področij $\blacktriangle ABC$ in $\blacktriangle BDC$, po aksiomu ploščine **A6** velja $\alpha(\blacktriangle ABC) + \alpha(\blacktriangle BDC) = 2\alpha(\blacktriangle ABC) = AB \cdot AC$, iz česar sledi $\alpha(\blacktriangle ABC) = \frac{AB \cdot AC}{2}$. Ploščina pravokotnega trikotnika je torej enaka polovici produkta dolžin njegovih katet. \square

Izrek 94. Ploščina trikotnika je polovica produkta dolžine poljubne stranice in višine na to stranico.

Dokaz Naj bo $\triangle ABC$ poljuben trikotnik. Označimo z D nožišče višine na stranico \overline{AB} . Dokaz izpeljemo z analizo primerov glede na medsebojno lego točk A , B in D .

1. *možnost:* Če je točka D enaka eni od točk A oziroma B , je $\triangle ABC$ pravokotni trikotnik s kateto \overline{AB} , katerega druga kateta je kar višina \overline{DC} , njegova ploščina pa je po Trditvi 93 enaka $\alpha(\blacktriangle ABC) = \frac{AB \cdot DC}{2}$.

2. *možnost:* Če velja $A * D * B$, je trikotno področje $\blacktriangle ABC$ unija trikotnih področij $\blacktriangle ADC$ in $\blacktriangle BDC$. Ker sta $\triangle ADC$ in $\triangle BDC$ pravokotna trikotnika, po Trditvi 93 velja $\alpha(\blacktriangle ADC) = \frac{AD \cdot DC}{2}$ in $\alpha(\blacktriangle BDC) = \frac{BD \cdot DC}{2}$. Po aksiomu ploščine **A6** sledi

$$\alpha(\blacktriangle ABC) = \alpha(\blacktriangle ADC) + \alpha(\blacktriangle BDC) = \frac{(AD + BD) \cdot DC}{2} = \frac{AB \cdot DC}{2}.$$

3. *možnost:* Če velja $D * A * B$, je trikotno področje $\blacktriangle ABC$ unija trikotnih področij $\blacktriangle DAC$ in $\blacktriangle DBC$. Ker sta $\triangle DAC$ in $\triangle DBC$ pravokotna trikotnika, po Trditvi 93 velja $\alpha(\blacktriangle DAC) = \frac{DA \cdot DC}{2}$ in $\alpha(\blacktriangle DBC) = \frac{DB \cdot DC}{2}$. Po aksiomu ploščine **A6** sledi

$$\alpha(\blacktriangle ABC) = \alpha(\blacktriangle DBC) - \alpha(\blacktriangle DAC) = \frac{(DB - DA) \cdot DC}{2} = \frac{AB \cdot DC}{2}.$$

4. *možnost:* Če velja $A * B * D$, povsem podobno pokažemo, da velja $\alpha(\blacktriangle ABC) = \frac{AB \cdot DC}{2}$. Dokazali smo, da je ploščina trikotnika enaka polovici produkta dolžine stranice ter višine na to stranico. \square

Štirikotnik se imenuje **trapez**, če sta nosilki dveh njegovih stranic med seboj vzporedni. Stranici, katerih nosilki sta vzporedni, imenujemo **osnovnici** trapeza. **Višina** trapeza je dolžina poljubne daljice, katere krajišči ležita na nosilkah osnovnic, njena nosilka pa je na osnovnici pravokotna. Ni težko razmisliti, da je višina na osnovnico trapeza s tem dobro definirana. Poseben primer trapeza je tudi paralelogram.

Trditev 95. Ploščina paralelograma je enaka produktu dolžine njegove stranice in višine na to stranico.

Dokaz Imejmo poljuben paralelogram $\square ABCD$. Ker sta nasprotni stranici paralelograma vzporedni, sta izmenična kota $\angle ABD$ in $\angle CDB$ skladna po obratu izreka o izmeničnih kotih. Prav tako sta skladna izmenična kota $\angle ADB$ in $\angle CBD$, zato sta trikotnika $\triangle ABD$ in $\triangle CDB$ skladna po izreku KSK. Iz tega po aksiomu **A6** sledi $\alpha(\blacktriangle ABD) = \alpha(\blacktriangle CDB)$.

Naj bo E nožišče višine na stranico \overline{AB} trikotnika $\triangle ABD$; tedaj je \overline{ED} tudi višina na stranico \overline{AB} paralelograma $\square ABCD$. Ker je štirikotno področje $\blacksquare ABCD$ unija trikotnih področij $\blacktriangle ABD$ in $\blacktriangle CDB$, po aksiomu **A6** in Izreku 94 sledi $\alpha(\blacksquare ABCD) = 2\alpha(\blacktriangle ABD) = AB \cdot ED$. \square

Trditev 96. Ploščina trapeza je enaka polovici produkta njegove višine in vsote dolžin obeh osnovnic.

Dokaz Naj bo $\square ABCD$ trapez z osnovnicama \overline{AB} in \overline{CD} . Naj bo E nožišče višine na stranico \overline{AB} trikotnika $\triangle ABD$ in F nožišče višine na stranico \overline{CD} trikotnika $\triangle CDB$. Ker sta osnovnici trapeza vzporedni, po obratu izreka o izmeničnih kotih sledi, da je štirikotnik $\square EBF D$ pravokotnik, zato sta njegovi stranici \overline{ED} in \overline{BF} skladni. Poleg tega je \overline{ED} tudi višina trapeza $\square ABCD$. Ker je štirikotno področje $\blacksquare ABCD$ unija trikotnih področij $\blacktriangle ABD$ in $\blacktriangle CDB$, po aksiomu **A6** in Izreku 94 sledi

$$\alpha(\blacksquare ABCD) = \alpha(\blacktriangle ABD) + \alpha(\blacktriangle CDB) = \frac{AB \cdot ED}{2} + \frac{CD \cdot FC}{2} = \frac{(AB + CD) \cdot ED}{2}. \quad \square$$

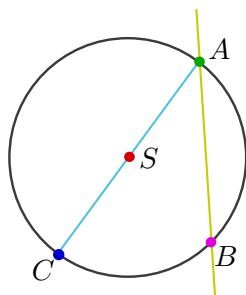
Poglavje 6

Krožnice

Definicija. Naj bo S poljubna točka in r pozitivno realno število. **Krožnica s središčem S in polmerom r** je množica

$$\mathcal{K}(S, r) = \{T \in \mathcal{R} \mid TS = r\}$$

vseh točk, katerih razdalja od točke S je enaka r . Dve krožnici sta **koncentrični**, če imata isto središče.



Slika 6.1: Krožnica s središčem S , premerom \overline{AC} in tetivo \overline{AB}

Naj bo $\gamma = \mathcal{K}(S, r)$ krožnica s središčem S in polmerom r . Če je T poljubna točka krožnice γ , tedaj daljico \overline{ST} imenujemo **polmer** krožnice. Nekoliko nenatančno isti izraz “polmer” uporabljamo tudi za dolžino daljice \overline{ST} , to je število r . Če sta A in B poljubni točki krožnice γ , tedaj daljico \overline{AB} imenujemo **tetiva** krožnice γ . Tetiva, ki vsebuje središče krožnice, se imenuje **premer** krožnice (prav tako nekoliko nenatančno z besedo “premer” označujemo dolžino take tetive, ki je enaka $2r$). Krajišči poljubnega premera krožnice imenujemo **antipodni točki** krožnice.

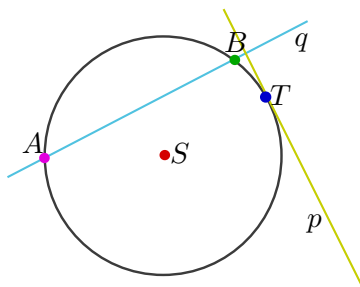
Notranjost krožnice $\gamma = \mathcal{K}(S, r)$ je množica vseh točk v ravnini, ki so od središča S oddaljene za manj kot r , medtem ko je **zunanost krožnice** γ množica vseh točk v ravnini, ki so od središča S oddaljene za več kot r . Unijo krožnice γ in njene notranjosti imenujemo **krog** s središčem S in polmerom r .

6.1 Krožnica in premice

Trditev 97. Poljubna krožnica in poljubna premica imata lahko največ dve skupni točki.

Dokaz Naj bo $\gamma = \mathcal{K}(S, r)$ krožnica in p poljubna premica. Denimo, da obstajajo tri paroma različne točke $A, B, C \in p \cap \gamma$. Po Izreku 12 natanko ena od teh treh točk leži med preostalima dvema; brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da velja $A * B * C$. Ker A, B in C ležijo na krožnici γ , velja $AS = BS = CS = r$, torej so $\triangle ABS$, $\triangle BCS$ in $\triangle ACS$ enakokraki trikotniki. Po izreku o enakokrakem trikotniku sledi $\angle ABS \cong \angle BAS \cong \angle BCS \cong \angle CBS$. Kota $\angle ABS$ in $\angle CBS$ sta sokota, torej po izreku o sokotih velja $\mu(\angle ABS) + \mu(\angle CBS) = 180 = \mu(\angle BAS) + \mu(\angle BCS)$. Iz tega sledi, da je vsota notranjih kotov trikotnika $\triangle ACS$ strogo večja od 180, kar je v nasprotju z Izrekom 61. Dobimo protislovje, kar pomeni, da presek premice p in krožnice γ vsebuje največ dve točki. \square

Naj bo γ poljubna krožnica. Če imata krožnica γ in premica p natanko eno skupno točko T , tedaj rečemo, da je premica p **tangentna** na krožnico γ v točki T (ali se **dotika** krožnice γ v točki T), premico p pa imenujemo **tangenta** krožnice γ . Če ima premica q s krožnico γ več kot eno skupno točko, tedaj jo imenujemo **sekanta** krožnice γ .



Slika 6.2: Krožnica s tangento p in sekanto q

Izrek 98 (Izrek o tangenti). Naj bo T skupna točka premice p in krožnice γ . Premica p je tangentna na γ natanko tedaj, ko je p pravokotna na polmer krožnice γ v točki T .

Dokaz Naj bo $\gamma = \mathcal{K}(S, r)$ krožnica s središčem S in polmerom r ter $T \in p \cap \gamma$.

Naj bo premica p tangenta na krožnico γ v točki T . Denimo, da p ni pravokotna na polmer \overline{ST} . Naj bo U točka na premici p , ki je presečišče pravokotnice na p skozi točko S ; torej je $U \neq T$. Po izreku o konstrukciji daljic (Izrek 18) obstaja natanko ena točka T' , za katero velja $T * U * T'$ in $TU = T'U$. Po Pitagorovem izreku velja $ST = \sqrt{TU^2 + US^2} = \sqrt{T'U^2 + US^2} = ST'$, torej je $ST' = ST = r$. Iz tega sledi, da tudi točka T' leži na krožnici γ in ker premica p seka γ v dveh različnih točkah, ni tangentna na krožnico γ . Dobimo protislovje, torej je p zares pravokotna na polmer \overline{ST} .

Denimo sedaj, da je premica p pravokotna na premico \overleftrightarrow{ST} . Naj bo Q poljubna točka premice p , različna od T . Po Trditvi 43 velja $SQ > ST = r$, torej točka Q leži v zunanosti

krožnice γ . Iz tega sledi, da je T edina skupna točka premice p in krožnice γ , torej je p tangentna na γ v točki T . \square

Izrek 99 (Izrek o sekanti). Če sekanta krožnico $\gamma = \mathcal{K}(S, r)$ seka v točkah A in B , potem središče S leži na simetrali tetive \overline{AB} .

Dokaz Označimo z M razpolovišče tetive \overline{AB} . Trikotnika $\triangle AMS$ in $\triangle BMS$ sta skladna po izreku SSS, saj imata skupno stranico \overline{MS} ter skladni stranici $\overline{AS} \cong \overline{BS}$ oziroma $\overline{AM} \cong \overline{BM}$. Torej sta tudi njuna notranja kota $\angle AMS$ in $\angle BMS$ skladna ter obenem sokota, zato sta prava. Premica \overleftrightarrow{MS} je pravokotna na nosilko tetive \overline{AB} in tetivo razpolavlja, torej je simetrala \overline{AB} . \square

Trditev 100. Če premica p vsebuje točko v notranjosti krožnice γ , potem p seka γ v natanko dveh točkah.

Dokaz Naj bo $\gamma = \mathcal{K}(S, r)$ krožnica s središčem S in polmerom r . Denimo, da premica p vsebuje točko P v notranjosti krožnice γ ; torej velja $PS < r$. Označimo s Q presečišče premice p in pravokotnice na p skozi točko S . Po Trditvi 43 velja $QS \leq PS < r$, torej točka Q leži v notranjosti krožnice γ . Označimo $QS = s$. Če premica p seka krožnico γ v točki X , potem je $\triangle SQX$ pravokotni trikotnik in po Pitagorovem izreku velja $QX = \sqrt{r^2 - s^2}$. Ker je $s < r$, ima število $r^2 - s^2$ pozitivni kvadratni koren $\sqrt{r^2 - s^2}$. Po aksiomu ravnila **A1** obstajata natanko dve točki X_1 in X_2 na premici p , za kateri velja $QX_i = \sqrt{r^2 - s^2}$ ($i = 1, 2$). Ti dve točki ležita hkrati na premici p in na krožnici γ , saj je $SX_i = \sqrt{QX_i^2 + QS^2} = r$. Po Trditvi 97 sta X_1 in X_2 edini presečišči premice p s krožnico γ . \square

6.2 Krožnice in trikotniki

Definicija. Krožnica, ki vsebuje vsa tri oglišča trikotnika $\triangle ABC$, se imenuje **očrtana krožnica** tega trikotnika.

Izrek 101 (o očrtani krožnici). Trikotnik ima očrtano krožnico natanko tedaj, ko se simetrale vseh treh stranic trikotnika sekajo v eni sami točki. Če trikotnik premore očrtano krožnico, tedaj je ta krožnica enolično določena.

Dokaz Naj bo $\triangle ABC$ poljuben trikotnik in označimo s p, q oz. r simetrale stranic \overline{AB} , \overline{BC} oz. \overline{CA} .

Denimo najprej, da se premice p, q in r sekajo v eni sami točki S . Tedaj po izreku o karakterizaciji simetrale daljice (Izrek 49) velja $AS = BS = CS$. Torej oglišča trikotnika $\triangle ABC$ ležijo na krožnici $\mathcal{K}(S, AS)$, ki je očrtana krožnica tega trikotnika.

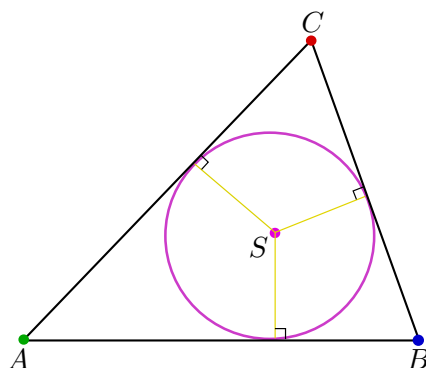
Sedaj predpostavimo, da ima trikotnik $\triangle ABC$ očrtano krožnico γ s središčem v točki S in polmerom r . Ker je točka S enako oddaljena od oglišč A in B , po Izreku 49 leži na simetrali p stranice \overline{AB} . Ker je S enako oddaljena od oglišč B in C , velja tudi $S \in q$ in podobno sklepamo, da je $S \in r$. Torej se premice p, q in r sekajo v natanko eni točki S .

Če trikotnik $\triangle ABC$ premore očrtano krožnico, tedaj po zgornjem razmisleku sledi, da mora biti središče te krožnice skupno presečišče S simetral vseh treh stranic trikotnika, torej je enolično določeno. Polmer te krožnice je enak SA in je tudi enolično določen. \square

Posledica 102. V evklidski geometriji ima vsak trikotnik očrtano krožnico.

Dokaz Po Izreku 85 so v evklidski geometriji simetrale stranic poljubnega trikotnika konkurentne, torej trikotnik premore očrtano krožnico po Izreku 101. \square

Definicija. Naj bo $\triangle ABC$ poljuben trikotnik. Krožnica γ se imenuje **včrtana krožnica** trikotnika $\triangle ABC$, če so vse tri nosilke stranic trikotnika tangentne na krožnico γ .



Slika 6.3: Včrtana krožnica trikotnika $\triangle ABC$

Izrek 103 (o včrtani krožnici). Vsak trikotnik ima enolično določeno včrtano krožnico. Simetrale notranjih kotov poljubnega trikotnika se sekajo v eni sami točki, ki je središče včrtane krožnice tega trikotnika.

Dokaz Naj bo $\triangle ABC$ poljuben trikotnik. Po izreku o prečki (Izrek 28) simetrala kota $\angle CAB$ seka stranico \overline{BC} v neki točki D . Če izrek o prečki uporabimo še za simetralo kota $\angle ABD$ trikotnika $\triangle ABD$, ugotovimo, da ta simetrala seka daljico \overline{AD} v neki točki E . Točka E leži v notranjosti kota $\angle BCA$. Dokazali bomo, da je E središče včrtane krožnice trikotnika $\triangle ABC$. Označimo s F, G oziroma H nožišča pravokotnic na premice $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}$ oziroma \overleftrightarrow{AC} skozi točko E . Kota $\angle EAF$ in $\angle EBF$ sta oba ostra kota, saj je vsak od njiju dvakrat manjši od notranjega kota trikotnika $\triangle ABC$. Iz tega sledi, da točka F leži med ogliščema A in B (če bi namreč ležala izven stranice \overline{AB} , bi po izreku o zunanjem kotu dobili protislovje). Podobno po izreku o zunanjem kotu sledi $G \in \overline{BC}$ in $H \in \overline{AC}$. Po izreku SKK (Izrek 46) velja $\triangle AEH \cong \triangle AEF$ in $\triangle BEF \cong \triangle BEG$, torej je $EF = EG = EH$. Iz tega sledi, da točke F, G in H ležijo na krožnici $\gamma = \mathcal{K}(E, EF)$. Ker so nosilke stranic $\overline{AB}, \overline{BC}$ oz. \overline{AC} pravokotne na polmere $\overline{EF}, \overline{EG}$ oz. \overline{EH} , so po izreku o tangenti (Izrek 98) tangentne na krožnico γ .

Ker je točka E enako oddaljena od premic \overleftrightarrow{AC} in \overleftrightarrow{BC} in leži v notranjosti kota $\angle ACB$, po Izreku 48 sledi, da E leži tudi na simetrali kota $\angle ACB$. To pomeni, da se vse tri simetrale notranjih kotov sekajo v eni sami točki E . Krožnica γ je včrtana krožnica trikotnika $\triangle ABC$.

Dokaz enoličnosti prepustimo bralcu. \square

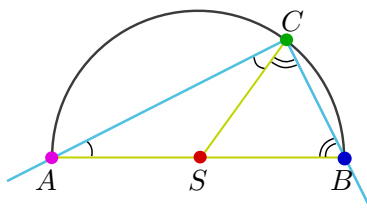
6.3 Krožnice v evklidski geometriji

Izrek 104 (Talesov izrek v krožnici). Če ima kot vrh na krožnici, njegova kraka pa potekata skozi antipodni točki te krožnice, potem je ta kot pravi.

Dokaz Imejmo krožnico $\gamma = \mathcal{K}(S, r)$ in naj bodo $A, B, C \in \gamma$ paroma različne točke, za katere velja $A * S * B$ ter $C \in \gamma$. Tedaj sta $\triangle ACS$ in $\triangle BCS$ enakokraka trikotnika in po izreku o enakokrakem trikotniku velja $\mu(\angle CAS) = \mu(\angle ACS)$ ter $\mu(\angle CBS) = \mu(\angle BCS)$. Ker točka S leži med A in B , po aksiomu o kotomeru dobimo $\mu(\angle BCA) = \mu(\angle BCS) + \mu(\angle ACS)$. Izrek o vsoti notranjih kotov trikotnika $\triangle ABC$ nam da

$$\mu(\angle CAS) + \mu(\angle CBS) + \mu(\angle BCA) = 2\mu(\angle BCA) = 180,$$

iz česar sledi $\mu(\angle BCA) = 90$. □



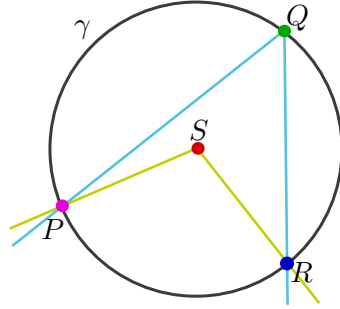
Slika 6.4: Talesov izrek v krožnici

Izrek 105 (Obrat Talesovega izreka). Če je $\angle ACB$ pravi kot, potem je \overline{AB} premer krožnice, očrtane trikotniku $\triangle ABC$.

Dokaz Naj bo $\angle ACB$ pravi kot. Označimo z M, N oz. L razpolovišča stranic $\overline{AB}, \overline{BC}$ oziroma \overline{AC} trikotnika $\triangle ABC$. Trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle MBN$ imata skupni kot $\angle ABC$ in enako razmerje dolžin stranic $\frac{AB}{BC} = \frac{MB}{BN}$, zato sta podobna po izreku SKS za podobne trikotnike (Izrek 77). Torej je kot $\angle BNM$ pravi kot. Iz tega sledi, da je premica \overleftrightarrow{MN} simetrala stranice \overline{BC} . Točka M je presečišče simetral stranic trikotnika $\triangle ABC$, torej središče očrtane krožnice. □

Definicija. Naj bo $\gamma = \mathcal{K}(S, r)$ krožnica. Če so P, Q in R paroma različne točke na krožnici γ , tedaj kot $\angle PQR$ imenujemo **obodni kot** krožnice γ . **Krožni lok** \widehat{PR} , ki pripada obodnemu kotu $\angle PQR$, je množica vseh točk krožnice γ , ki ležijo v notranjosti kota $\angle PQR$. V tem primeru kot $\angle PQR$ imenujemo tudi **obodni kot nad lokom** \widehat{PR} . Če sta P in R poljubni točki krožnice γ , ki nista antipodni, tedaj kot $\angle PSR$ imenujemo **središčni kot** krožnice γ .

Definicija. Naj bo $\angle PQR$ obodni kot krožnice $\gamma = \mathcal{K}(S, r)$, tako da bodisi točki Q in R ležita na nasprotnih bregovih premice \overleftrightarrow{SP} bodisi točki P in Q ležita na nasprotnih bregovih premice \overleftrightarrow{SR} . V tem primeru kot $\angle PSR$ imenujemo **pripadajoči središčni kot** obodnega kota $\angle PQR$.



Slika 6.5: Obodni kot $\angle PQR$ nad lokom \widehat{PR} in pripadajoči središčni kot $\angle PSR$

Izrek 106 (Izrek o središčnem kotu). Obodni kot je dvakrat manjši od pripadajočega središčnega kota.

Dokaz Naj bo $\angle PQR$ obodni kot krožnice $\gamma = \mathcal{K}(S, r)$. Za dokaz uporabimo analizo primerov glede na lego središča S .

1. *možnost*: Denimo, da točka S leži na enem od krakov kota $\angle PQR$, npr. na kraku \overrightarrow{QP} . Tedaj velja $P * S * Q$ in je središčni kot $\angle PSR$ zunanji kot trikotnika ΔQSR , katerega velikost je enaka vsoti velikosti nepriležnih notranjih kotov $\angle QRS$ in $\angle RQS$. Ker je $QS = RS = r$, je ΔQSR enakokraki trikotnik in po izreku o enakokrakem trikotniku velja $\mu(\angle QRS) = \mu(\angle RQS)$. Iz tega sledi $\mu(\angle PQR) = \mu(\angle RQS) = \frac{1}{2}\mu(\angle PSR)$. Če točka S leži na drugem kraku kota $\angle PQR$, je dokaz analogen.

2. *možnost*: Denimo, da točka S leži v notranjosti kota $\angle PQR$. Označimo $\overrightarrow{QS} \cap \gamma = \{Q, T\}$. Trikotnika ΔPSQ in ΔRSQ sta enakokraka, saj sta po dve stranici vsakega od njiju polmera krožnice γ . Po izreku o enakokrakem trikotniku sledi $\angle PQS \cong \angle QPS$ in $\angle QRS \cong \angle RQS$. Za središčni kot $\angle PSR$ po aksiomu kotomera velja $\mu(\angle PSR) = \mu(\angle PST) + \mu(\angle TSR)$. Kot $\angle PST$ je zunanji kot trikotnika ΔPSQ , katerega velikost je enaka vsoti velikosti nepriležnih notranjih kotov: $\mu(\angle PST) = \mu(\angle PQS) + \mu(\angle QPS) = 2\mu(\angle PQS)$. Podobno je kot $\angle RST$ zunanji kot trikotnika ΔRSQ , za katerega velja $\mu(\angle RST) = \mu(\angle RQS) + \mu(\angle QRS) = 2\mu(\angle RQS)$. Iz tega sledi $\mu(\angle PSR) = 2(\mu(\angle PQS) + \mu(\angle RQS)) = 2\mu(\angle PQR)$.

3. *možnost*: Denimo, da točka S leži v zunanosti kota $\angle PQR$. Predpostavimo, da točki P in Q ležita na nasprotnih bregovih premice \overleftrightarrow{SR} in označimo $\overrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{SR} = T$. Označimo $\beta = \mu(\angle SQP)$ in $\alpha = \mu(\angle SQR)$. Potem je ΔQSR enakokraki trikotnik, za katerega velja $\mu(\angle SQR) = \mu(\angle SRQ) = \alpha$ in ker točka T leži v notranjosti kota $\angle SQR$, po aksiomu o kotomeru sledi $\mu(\angle SQR) = \mu(\angle SQT) + \mu(\angle TQR)$. Tudi ΔSQP je enakokraki trikotnik, za katerega velja $\mu(\angle SQP) = \mu(\angle SPQ) = \beta$ in posledično $\mu(\angle TQR) = \alpha - \beta$. Kot $\angle PTR$ je zunanji kot trikotnikov ΔTQR in ΔPST , katerega velikost je enaka vsoti velikosti nepriležnih notranjih kotov. Torej velja $\mu(\angle PTR) = \mu(\angle TQR) + \mu(\angle TRQ) = 2\alpha - \beta$ in $\mu(\angle PTR) = \mu(\angle PSR) + \mu(\angle SPQ)$, iz česar sledi $\mu(\angle PSR) = 2\alpha - \beta - \beta = 2(\alpha - \beta) = 2\mu(\angle PQR)$. Če točki Q in R ležita na nasprotnih bregovih premice \overleftrightarrow{SP} , je dokaz analo-

gen.

□

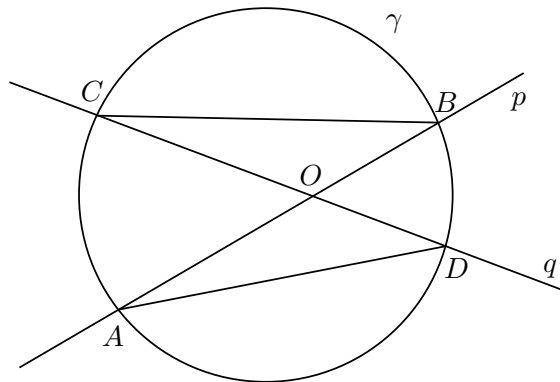
Posledica 107 (Izrek o obodnem kotu). Poljubna dva obodna kota nad istim lokom krožnice sta med seboj skladna.

Dokaz Naj bo $\gamma = \mathcal{K}(S, r)$ krožnica ter imejmo obodna kota $\angle PQR$ ter $\angle PQ'R$ nad lokom \widehat{PR} krožnice γ . Če središčni kot $\angle PSR$ pripada obodnima kotoma $\angle PQR$ in $\angle PQ'R$, sta obodna kota po Izreku 106 dvakrat manjša od tega središčnega kota in potentakem skladna. Če pa središčni kot $\angle PSR$ ne pripada obodnima kotoma $\angle PQR$ in $\angle PQ'R$, tedaj označimo s T točko krožnice γ , za katero velja $T * S * Q$. Potem obodnima kotoma $\angle PQT$ in $\angle PQ'T$ pripada središčni kot $\angle PST$, obodnima kotoma $\angle TQR$ in $\angle TQ'R$ pa pripada središčni kot $\angle TSR$. Iz tega sledi $\mu(\angle PQR) = \mu(\angle PQT) + \mu(\angle TQR) = \mu(\angle PQ'T) + \mu(\angle TQ'R) = \mu(\angle PQ'R)$. □

Definicija. Naj bo γ krožnica in O točka, ki ne leži na krožnici γ . **Potenco točke O na krožnico γ** definiramo takole. Naj bo p poljubna premica, ki vsebuje točko O in ima skupno točko s krožnico γ . Če premica p seka krožnico γ v točkah A in B , tedaj potenco točke O na krožnico γ definiramo kot $OA \cdot OB$. Če pa je premica p tangenta na krožnico γ v točki C , tedaj potenco točke O na krožnico γ definiramo kot OC^2 .

Izrek 108 (Izrek o potenci točke na krožnico). Potenca točke na krožnico je dobro definirana, torej ima vselej isto vrednost ne glede na izbiro premice skozi dano točko, ki ima vsaj eno skupno točko z dano krožnico.

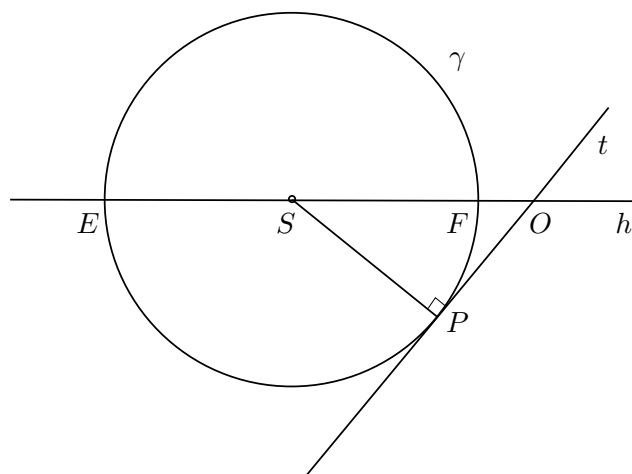
Dokaz Naj bo $\gamma = \mathcal{K}(S, r)$ krožnica in O točka, ki ne leži na γ . Uporabimo dokaz z analizo primerov. Točka O se nahaja bodisi v notranjosti bodisi v zunanosti krožnice γ . Če se O nahaja v zunanosti krožnice γ , ločeno obravnavamo dve (poljubni) sekanti ter tangento in eno (posebno) sekanto krožnice, ki vsebujejo točko O .



Slika 6.6: Prva skica k dokazu izreka 108

Denimo najprej, da velja $OS < r$, torej točka O leži v notranjosti krožnice γ . Po Trditvi 100 poljubna premica, ki vsebuje točko O , seka γ v natanko dveh točkah. Naj bo p premica, ki vsebuje točko O in seka γ v točkah A in B . Naj bo q premica, ki vsebuje

točko O in seka γ v točkah C in D . Oglejmo si notranje kote trikotnikov ΔAOD in ΔCOB . Kota $\angle ABC$ in $\angle ADC$ sta obodna kota nad istim lokom \widehat{AC} , zato sta po izreku o obodnih kotih skladna. Torej sta skladna tudi kota $\angle OBC$ in $\angle ADO$. Kota $\angle AOD$ in $\angle BOC$ sta skladna po izreku o sovršnih kotih. Torej imata trikotnika ΔAOD in ΔCOB dva para skladnih notranjih kotov, zato sta po izreku o vsoti notranjih kotov skladna tudi kota $\angle DAO$ in $\angle BCO$. Zato sta ΔAOD in ΔCOB podobna trikotnika in po izreku o podobnih trikotnikih sledi, da imata enako razmerje dolžin istoležnih stranic: $\frac{AO}{CO} = \frac{OD}{OB}$. Torej velja $OA \cdot OB = OC \cdot OD$.



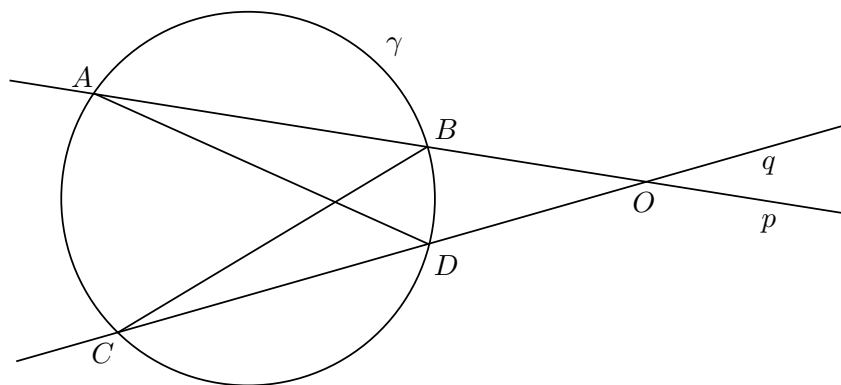
Slika 6.7: Druga skica k dokazu izreka 108

Predpostavimo sedaj, da je $OS > r$. Naj bo h premica, ki vsebuje točko O in seka krožnico γ v točkah E in F , tako da velja $E * S * F * O$. Naj bo t premica, ki vsebuje točko O in je tangenta na γ v točki P . Premica t je po izreku o tangenti pravokotna na polmer \overline{SP} , zato nam Pitagorov izrek za trikotnik ΔOSP da enakost $OP^2 = OS^2 - SP^2$. Ker točke E, F in P ležijo na krožnici γ , velja $ES = FS = PS = r$ in posledično

$$OP^2 = OS^2 - SP^2 = (OS + SP)(OS - SP) = (OS + SE)(OS - SF) = OE \cdot OF .$$

Če torej potenco točke O na krožnico γ izračunamo iz tangente na γ ali pa iz posebne sekante krožnice γ , ki vsebuje središče krožnice, dobimo isto vrednost.

Izberimo sedaj še poljubni dve sekanti p, q krožnice γ , ki vsebujeta točko O . Denimo, da p seka krožnico γ v točkah A in B , q pa seka krožnico γ v točkah C in D . Trikotnika ΔAOD in ΔCOB imata skupni notranji kot pri oglišču O . Ker sta kota $\angle OAD$ in $\angle OCB$ obodna kota nad istim lokom \widehat{BD} krožnice γ , sta po izreku o obodnih kotih skladna. Trikotnika ΔAOD in ΔCOB imata potemtakem dva para skladnih notranjih kotov, zato sta po izreku o vsoti notranjih kotov podobna. Po izreku o podobnih trikotnikih imata enako razmerje dolžin istoležnih stranic: $\frac{AO}{OD} = \frac{CO}{OB}$, iz česar sledi $OA \cdot OB = OC \cdot OD$. \square

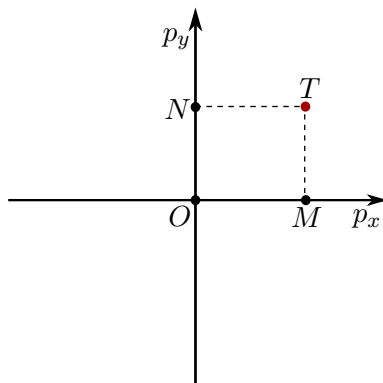


Slika 6.8: Tretja skica k dokazu izreka 108

Poglavje 7

Kartezični koordinatni sistemi

V ravninsko geometrijo, ki smo jo vpeljali v obliki aksiomatskega sistema, lahko enostavno uvedemo kartezični koordinatni sistem. Najprej izberemo poljubno premico p_x , ki bo predstavljala abscisno os. Po aksiomu ravnila ta premica dopušča koordinatni sistem $f: p_x \rightarrow \mathbb{R}$ in točko $f^{-1}(0) = O$ imenujemo **izhodišče**. Premico p_y , ki pravokotno seka premico p_x v izhodišču, opremimo s koordinatnim sistemom $g: p_y \rightarrow \mathbb{R}$, v katerem je koordinata izhodišča enaka 0.



Za poljubno točko T v ravnini pravokotnica k premici p_x skozi točko T seka abscisno os p_x v točki M ; koordinato te točke označimo z x in jo imenujemo **x -koordinata** ali **abscisa** točke T . Pravokotnica k premici p_y skozi točko T seka ordnatno os p_y v točki N ; koordinato te točke označimo z y in jo imenujemo **y -koordinata** ali **ordinata** točke T . Tako poljubni točki T ravnine ustreza urejeni par realnih števil $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in dobimo bijektivno preslikavo

$$\mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} .$$

Na podlagi te preslikave pogosto z izrazom “točka (x, y) ” poimenujemo točko, ki ustreza urejenemu paru (x, y) ob tej bijektivni preslikavi.

Izrek 109. Razdalja med točkama $T_1(x_1, y_1)$ in $T_2(x_2, y_2)$ je dana s formulo

$$T_1T_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} .$$

Dokaz Označimo z M_i oz. N_i pravokotno projekcijo točke T_i na abscisno oz. ordinatno os v zgornji definiciji koordinat. Uporabimo analizo primerov:

1. *možnost*: Če je $T_1 = T_2$, potem sledi $0 = T_1T_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
2. *možnost*: Če je $x_1 = x_2 = 0$ ter $y_1 \neq y_2$, potem velja $T_1 = N_1$ in $T_2 = N_2$ ter $T_1T_2 = |y_2 - y_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
3. *možnost*: Če je $x_1 = x_2 \neq 0$ ter $y_1 \neq y_2$, potem je $\square T_1T_2N_2N_1$ pravokotnik, katerega stranici $\overline{T_1T_2}$ ter $\overline{N_1N_2}$ sta skladni in zato $T_1T_2 = |y_1 - y_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
4. *možnost*: Če je $x_1 \neq x_2$ ter $y_1 = y_2 = 0$, potem velja $T_1 = M_1$ in $T_2 = M_2$ ter $T_1T_2 = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
5. *možnost*: Če je $x_1 \neq x_2$ ter $y_1 = y_2 \neq 0$, potem je $\square T_1T_2M_2M_1$ pravokotnik, katerega stranici $\overline{T_1T_2}$ ter $\overline{M_1M_2}$ sta skladni in zato $T_1T_2 = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
6. *možnost*: Če je $x_1 \neq x_2$ in $y_1 \neq y_2$, potem se premici $\overleftrightarrow{T_1N_1}$ in $\overleftrightarrow{T_2M_2}$ sekata v neki točki Q in je $\triangle T_1QT_2$ pravokotni trikotnik, za katerega velja $T_1Q = M_1M_2$ in $T_2Q = N_1N_2$ (daljici $\overline{T_1Q}$ in $\overline{M_1M_2}$ namreč bodisi sovpadata bodisi predstavljata nasprotni stranici pravokotnika; podobno velja za daljici $\overline{T_2Q}$ in $\overline{N_1N_2}$). Po Pitagorovem izreku dobimo

$$T_1T_2^2 = T_1Q^2 + T_2Q^2 = M_1M_2^2 + N_1N_2^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2. \quad \square$$

Nekatere znane podmnožice točk ravnine lahko s pomočjo koordinatnega sistema algebrailčno izrazimo. Naj bosta $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funkciji dveh spremenljivk. **Graf enačbe** $f(x, y) = g(x, y)$ je množica vseh točk (x, y) v ravnini, za katere velja enačba $f(x, y) = g(x, y)$.

Izrek 110. Vsaka premica v ravnini je graf linearne enačbe

$$ax + by + c = 0$$

za neke konstante $a, b, c \in \mathbb{R}$, ter a in b nista obe enaki 0.

Dokaz Naj bo p poljubna premica ravnine in $T \in p$. Označimo s q pravokotnico premice p v točki T in naj bosta $A, B \in q$ točki, za kateri velja $A * T * B$ ter $AT = BT$. Tedaj je p simetrala daljice \overline{AB} in po Izreku 49 velja $p = \{T \in \mathcal{R} \mid AT = BT\}$. Označimo z (x_1, y_1) oz. (x_2, y_2) koordinati točk A oz. B . Koordinati poljubne točke $(x, y) \in p$ torej ustrezata enačbi

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} &= \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} \\ x^2 - 2x_1x + x_1^2 + y^2 - 2y_1y + y_1^2 &= x^2 - 2x_2x + x_2^2 + y^2 - 2y_2y + y_2^2 \\ 2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + (x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2) &= 0 \end{aligned}$$

Ker $A \neq B$, velja $x_1 \neq x_2$ ali $y_1 \neq y_2$, torej je vsaj eden od koeficientov $2(x_2 - x_1)$ oz. $2(y_2 - y_1)$ različen od nič. \square

Premica v ravnini je **navpična**, če je bodisi vzporedna ordinatni osi bodisi z njo sovpada. Ordinatna os je po definiciji pravokotnica na abscisno os v izhodišču, zato jo lahko v dokazu Izreka 110 dobimo kot simetralo daljice \overline{AB} , kjer sta točki A in B dani s koordinatama $A(-1, 0)$ in $B(1, 0)$. Torej je enačba ordinatne osi enaka $x = 0$.

Trditev 111. Poljubna navpična premica je graf enačbe $x = m$ za nek $m \in \mathbb{R}$. Če p ni navpična premica, potem je p graf enačbe $y = kx + n$ za neki konstanti $k, n \in \mathbb{R}$.

Dokaz Naj bo q navpična premica. Tedaj je q pravokotna na abscisno os p_x in jo seka v neki točki $M \in q \cap p_x$. Posledično sta x -koordinati poljubnih dveh točk na premici q enaki. Naj bosta $A(x_1, y_1)$ in $B(x_2, y_2)$ dve različni točki na premici q ; tedaj je $x_1 = x_2$. Po Izreku 110 je premica q graf enačbe $ax + by + c = 0$ za neke konstante $a, b, c \in \mathbb{R}$, iz česar sledi $by_1 + c = by_2 + c$ oziroma $b(y_1 - y_2) = 0$ in ker $y_1 \neq y_2$, sledi $b = 0$. Torej je premica q dana z enačbo $x = -\frac{c}{a}$ za neki konstanti $a, c \in \mathbb{R}$, kjer je $a \neq 0$.

Denimo sedaj, da je p premica, ki ni navpična. Tedaj p seka ordinatno os v natanko eni točki $(0, y_1)$. Po Izreku 110 je enačba premice p oblike $ax + by + c = 0$, pri čemer $b \neq 0$ (saj imajo v primeru, ko je $b = 0$, vse točke na premici isto x -koordinato). Torej lahko izrazimo $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. \square

Trditev 112. Če je premica p graf enačbe $y = kx + n$ in sta $T_1(x_1, y_1)$ ter $T_2(x_2, y_2)$ poljubni dve različni točki premice p , potem velja $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Dokaz Ker točki T_1 in T_2 ležita na premici p , velja $y_i = kx_i + n$ za $i = 1, 2$ in posledično $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Če bi veljalo $x_1 = x_2$, bi iz tega sledilo $y_1 = y_2$, kar je v nasprotju s predpostavko, da sta T_1 in T_2 različni točki. Torej je $x_1 \neq x_2$ in lahko izrazimo $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. \square

Število k v enačbi premice $y = kx + n$ je potemtakem enolično določeno s premico p in ga imenujemo **smerni koeficient** premice.

Trditev 113. Naj bosta p in p' premici s smernima koeficientoma k in k' , od katerih nobena ni navpična. Če sta p in p' pravokotni, tedaj velja $k' = -\frac{1}{k}$.

Dokaz Označimo s T presečišče premic p in p' . Naj bosta $T_1(x_1, y_1), T_2(x_2, y_2) \in p'$ točki, za kateri velja $T_1 * T * T_2$ in $T_1T = T_2T$. Tedaj je p simetrala daljice $\overline{T_1T_2}$ in kot v dokazu Izreka 110 izračunamo $2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + (x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2) = 0$. To je linearna enačba oblike $ax + by + c = 0$ z $a = 2(x_2 - x_1)$, $b = 2(y_2 - y_1)$ in $k = -\frac{a}{b} = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$. Po Trditvi 112 pa dobimo $k' = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, iz česar sledi $k' = -1/k$. \square

Trditev 114. Vsaka krožnica je graf enačbe oblike $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ za neka števila $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Dokaz Naj bo $\gamma = \mathcal{K}(S, r)$ poljubna krožnica s središčem $S(a, b)$ in polmerom r . Po definiciji krožnice in Izreku 109 je krožnica γ graf enačbe $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$ oziroma

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0. \quad \square$$

Poglavje 8

Transformacije v geometriji

Spomnimo se, da z \mathcal{R} označujemo ravnino.

Definicija. Transformacija je poljubna bijektivna preslikava $T: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$. Transformacija se imenuje **izometrija**, če za poljubni točki A in B velja $T(A)T(B) = AB$.

Zgled 16. Identična preslikava $id: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, definirana z $id(A) = A$ za vsako točko A , je izometrija ravnine.

Zgled 17 (Zrcaljenje preko premice). Naj bo p premica. Zrcaljenje preko premice p je preslikava $Z_p: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, definirana takole. Za poljubno točko $T \in p$ je $Z_p(T) = T$. Za poljubno točko T , ki ne leži na premici p , pa naj pravokotnica k premici p skozi točko T seka p v točki Q , in naj bo T' točka, za katero velja $T * Q * T'$ in $TQ = T'Q$. Tedaj definiramo $Z_p(T) = T'$.

Trditev 115. Zrcaljenje preko premice je izometrija.

Dokaz Naj bo p poljubna premica. Izberimo kartezični koordinatni sistem, v katerem premica p ustreza x -osi. Tedaj zrcaljenje Z_p poljubno točko $T(x, y)$ preslika v točko $T'(x, -y)$. Za poljubni točki $T_1(x_1, y_1)$ in $T_2(x_2, y_2)$ potemtakem velja $T_1T_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ in $T_1'T_2' = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2} = T_1T_2$. Poleg tega za zrcaljenje preko premice velja $Z_p \circ Z_p = id$, iz česar sledi, da je Z_p bijektivna preslikava. Torej je Z_p res izometrija ravnine. \square

Trditev 116. Kompozitum dveh izometrij je izometrija. Inverz poljubne izometrije je izometrija.

Dokaz Naj bosta $f, g: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ poljubni izometriji evklidske ravnine. Ker je kompozitum dveh bijekcij spet bijektivna preslikava, je $f \circ g$ bijekcija. Za poljubni točki $A, B \in \mathcal{R}$ velja $(f \circ g)(A)(f \circ g)(B) = f(g(A))f(g(B)) = g(A)g(B) = AB$, torej je tudi $f \circ g$ izometrija.

Ker je f bijekcija, obstaja inverz $f^{-1}: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, ki je spet bijektivna preslikava. Ker je f surjektivna, obstajata točki $A', B' \in \mathcal{R}$, za kateri je $A = f(A')$ in $B = f(B')$. Za inverz f^{-1} izometrije f velja $f^{-1}(A)f^{-1}(B) = f^{-1}(f(A'))f^{-1}(f(B')) = A'B' = f(A')f(B') = AB$, torej je tudi f^{-1} izometrija. \square

Izrek 117 (Lastnosti izometrij). Naj bo $T: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ poljubna izometrija. Tedaj velja:

1. T ohranja kolinearne točke: če so A, B in C kolinearne točke, tedaj so tudi $T(A), T(B)$ in $T(C)$ kolinearne točke.
2. T ohranja vmesnost točk: če za točke A, B in C velja $A * B * C$, tedaj sledi $T(A) * T(B) * T(C)$.
3. T ohranja daljice: za poljubno daljico \overline{AB} je tudi $\overline{T(A)T(B)}$ daljica, ki je skladna z daljico \overline{AB} .
4. T ohranja premice: če je p premica, tedaj je tudi $T(p)$ premica.
5. T ohranja vmesnost poltrakov: če za poltrake $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ in \overrightarrow{OC} velja, da \overrightarrow{OB} leži med poltrakoma \overrightarrow{OA} in \overrightarrow{OC} , tedaj tudi poltrak $\overrightarrow{T(O)T(B)}$ leži med poltrakoma $\overrightarrow{T(O)T(A)}$ in $\overrightarrow{T(O)T(C)}$.
6. T ohranja kote: če je $\angle BAC$ poljuben kot, tedaj je tudi $T(\angle BAC)$ kot in velja $T(\angle BAC) \cong \angle BAC$.
7. T ohranja trikotnike: če je $\triangle ABC$ trikotnik, tedaj je $T(\triangle ABC)$ trikotnik in velja $T(\triangle ABC) \cong \triangle ABC$.
8. T ohranja krožnice: Če je γ krožnica s središčem S in polmerom r , tedaj je $T(\gamma)$ krožnica s središčem v točki $T(S)$ in polmerom r .
9. T ohranja plosčine: če je R večkotno področje, tedaj je $T(R)$ večkotno področje in velja $\alpha(T(R)) = \alpha(R)$.

Dokaz 1. Naj bodo A, B in C tri kolinearne točke. Po Izreku 12 natanko ena od teh treh točk leži med ostalima dvema; brez škode za splošnost privzemimo, da velja $A * B * C$. To pomeni, da je $AB + BC = AC$ in po definiciji izometrije sledi $T(A)T(B) + T(B)T(C) = T(A)T(C)$. Če točke $T(A), T(B)$ in $T(C)$ ne bi bile kolinearne, potem bi po trikotniški neenakosti veljalo $T(A)T(C) < T(A)T(B) + T(B)T(C)$ in dobimo protislovje. Torej so $T(A), T(B)$ in $T(C)$ kolinearne točke. Preostanek dokaza prepustimo bralcu za vajo.

Izrek 117 nam pove, da se ob izometriji geometrijski objekti premikajo vzdolž ravnine, medtem ko se njihove geometrijske lastnosti (ter geometrijski odnosi med različnimi objekti) ohranjajo. Zato izometrije evklidske ravnine imenujemo tudi **togi premiki**.

Lema 118. Naj bodo A, B in C tri nekolinearne točke. Če je $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ izometrija, za katero velja $f(A) = A, f(B) = B$ in $f(C) = C$, potem je f identična preslikava.

Dokaz Denimo, da je f izometrija, za katero velja $f(A) = A, f(B) = B$ in $f(C) = C$. Izberimo poljubno točko $T \in \mathcal{R}$. Dokazati želimo, da velja $f(T) = T$. Uporabimo dokaz z analizo primerov glede na lego točke T .

1. *možnost*: Denimo najprej, da točka T leži na premici \overleftrightarrow{AB} . Ker f ohranja kolinearne

točk (Izrek 117), tudi točka $f(T)$ leži na premici \overleftrightarrow{AB} . Ker je $TA = f(T)A$ in $TB = f(T)B$ ter se vmesnost točk z izometrijo ohranja, sledi $f(T) = T$.

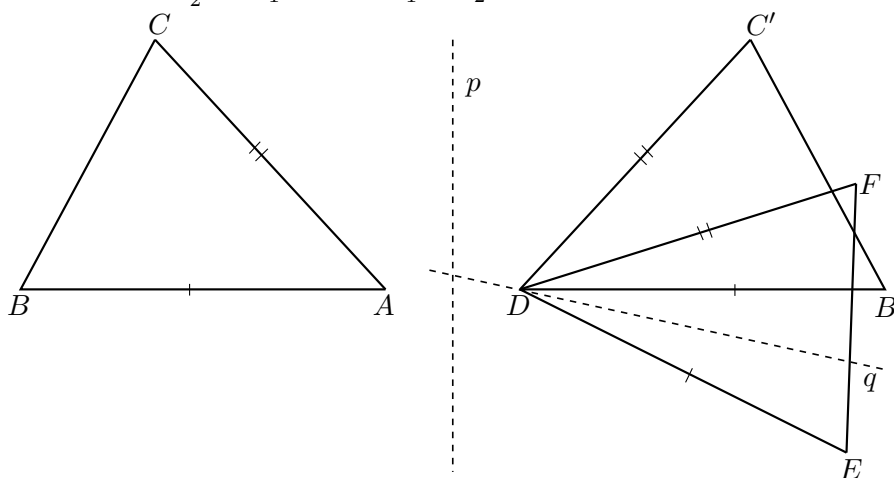
2. *možnost*: Denimo sedaj, da točka T ne leži na premici \overleftrightarrow{AB} . Ker f ohranja kote in velja $f(\overleftrightarrow{AB}) = \overleftrightarrow{AB}$, točka $f(T)$ leži bodisi na poltraku \overrightarrow{AT} bodisi na poltraku \overrightarrow{AT}' , kjer je T' zrcalna slika točke T pri zrcaljenju preko premice \overleftrightarrow{AB} . Ker velja $Af(T) = AT$, je bodisi $f(T) = T$ bodisi $f(T) = T'$.

Če točki T in C ležita na isti strani premice \overleftrightarrow{AB} , tedaj daljica \overline{TC} ne seka premice \overleftrightarrow{AB} in posledično tudi daljica $f(\overline{TC})$ ne seka premice \overleftrightarrow{AB} (f namreč ohranja vse točke s premice \overleftrightarrow{AB} in ker je injektivna, nobena točka daljice $f(\overline{TC})$ ne more ležati na tej premici). Torej točka $f(T)$ leži na isti strani premice \overleftrightarrow{AB} kot točka C in posledično $f(T) = T$.

Če pa točki T in C ležita na nasprotnih straneh premice \overleftrightarrow{AB} , potem daljica \overline{TC} seka premico \overleftrightarrow{AB} in zato tudi njena slika $f(\overline{TC})$ seka premico \overleftrightarrow{AB} . Torej $f(T) \neq T'$ in zato $f(T) = T$. \square

Izrek 119. Če sta $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$ dva skladna trikotnika, tedaj obstaja enolično določena izometrija T , za katero velja $T(A) = D$, $T(B) = E$ in $T(C) = F$.

Dokaz Najprej dokažimo enoličnost. Denimo, da bi obstajali dve različni izometriji T_1 in T_2 , za kateri bi veljalo $T_1(A) = T_2(A) = D$, $T_1(B) = T_2(B) = E$ in $T_1(C) = T_2(C) = F$. Potem je kompozitum $T_2^{-1} \circ T_1$ izometrija, ki ohranja tri nekolinearne točke A , B in C , zato po lemi 118 sledi $T_2^{-1} \circ T_1 = id$ in $T_1 = T_2$.



Slika 8.1: Konstrukcija v dokazu izreka 119

Sedaj dokažimo še obstoj ustrezne izometrije T . Naj bo p simetrala daljice \overline{AD} . Če je slučajno $D = A$, lahko za p izberemo poljubno premico, ki vsebuje točko A . Označimo z Z_p zrcaljenje preko premice p ; tedaj velja $Z_p(A) = D$. Označimo še $B' = Z_p(B)$ ter $C' = Z_p(C)$. Naj bo q simetrala daljice $\overline{B'E}$ (če je slučajno $B' = E$, označimo $q = \overleftrightarrow{DE}$). Velja torej $Z_q(D) = D$ (ker je $AB = B'D = ED$), $Z_q(B') = E$ in označimo $C'' = Z_q(C')$.

Ker zrcaljenja ohranjajo dolžine in velikosti kotov, je bodisi $C'' = F$ bodisi je C'' zrcalna slika točke F pri zrcaljenju preko premice $t = \overleftrightarrow{DE}$. Če je $C'' = F$, definiramo

$T = Z_q \circ Z_p$, v nasprotnem primeru pa vzamemo $T = Z_t \circ Z_q \circ Z_p$. Preslikava T je izometrija, za katero velja $T(A) = D$, $T(B) = E$ in $T(C) = F$. \square

Konstrukcija v dokazu izreka 119 nam med drugim pove tudi, da je poljubno izometrijo evklidske ravnine mogoče sestaviti zgolj iz ene vrste izometrij.

Posledica 120. Vsako izometrijo evklidske ravnine lahko izrazimo kot kompozitum samih zrcaljenj. Pri tem potrebujemo največ tri zrcaljenja.

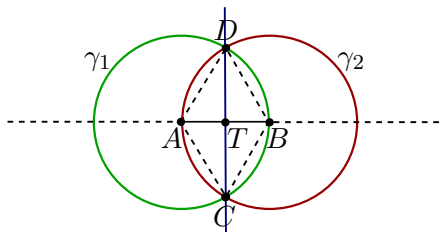
Dokaz Naj bo $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ poljubna izometrija. Izberimo poljubne tri nekolinearne točke A , B in C ter označimo $D = f(A)$, $E = f(B)$ in $F = f(C)$. Po Izreku 117 sta $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$ skladna trikotnika, zato je f po Izreku 119 edina izometrija, ki točke A , B oz. C zaporedoma preslika v D , E oz. F . Iz dokaza Izreka 119 sledi, da lahko f izrazimo kot kompozitum samih zrcaljenj, pri čemer potrebujemo največ tri zrcaljenja. \square

Poglavje 9

Geometrijske konstrukcije

Ukvarjali se bomo s konstrukcijami z neoznačenim ravnilom in šestilom. Stari Grki so o geometriji razmišljali na osnovi teh dveh orodij in veliko časa posvetili vprašanju, katere like je z njuno pomočjo mogoče konstruirati.

Preden se lotimo geometrijskih konstrukcij z ravnilom in šestilom, natančneje razložimo omejitve pri uporabi teh orodij. Predpostavljamo, da lahko s pomočjo ravnila povsem natančno narišemo premico skozi dve dani točki. S šestilom lahko povsem natančno narišemo krožnico s središčem v dani točki S , ki vsebuje dano točko T . Poleg tega je naše šestilo kolapsibilno, kar pomeni, da z njim ne moremo prenašati razdalj (ko šestilo dvignemo s papirja, se avtomatično “zloži”). Oglejmo si kak zglede geometrijskih konstrukcij.



Slika 9.1: Konstrukcija simetrale daljice

Zgled 18 (Konstrukcija simetrale dane daljice). Dani sta točki A in B , želimo pa konstruirati simetrano daljice \overline{AB} . Potek konstrukcije:

1. Narišemo krožnico $\gamma_1 = \mathcal{K}(A, AB)$ s središčem v točki A , ki vsebuje točko B .
2. Narišemo krožnico $\gamma_2 = \mathcal{K}(B, AB)$ s središčem v točki B , ki vsebuje točko A .
3. Označimo $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{C, D\}$.
4. Narišemo premico \overleftrightarrow{CD} .

V nadaljevanju želimo dokazati, da je premica \overleftrightarrow{CD} simetrana daljice \overline{AB} . Še prej pa je potrebno utemeljiti konstrukcijo samo, natančneje njen tretji korak. Kako vemo, da se

krožnici γ_1 in γ_2 zares sekata? Za dokaz tega potrebujemo pomemben rezultat, ki se imenuje izrek o dveh krožnicah.

Izrek 121 (Izrek o dveh krožnicah). Naj bosta γ_1 in γ_2 krožnici s polmeroma a in b in naj bo c razdalja med njunima središčema. Če je vsako od števil a , b in c manjše kot vsota preostalih dveh števil, se krožnici γ_1 in γ_2 sekata v dveh točkah. Njuni presečišči v tem primeru ležita na nasprotnih bregovih premice skozi središči obeh krožnic.

Za dokaz izreka o dveh krožnicah bomo uporabili naslednjo lemo.

Lema 122. Če za tri pozitivna števila a , b in c velja, da je vsako od njih manjše kot vsota preostalih dveh števil, tedaj obstaja trikotnik s stranicami dolžin a , b in c .

Dokaz Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da velja $a \geq b \geq c$. Naj bo \overline{BC} daljica dolžine a . Želimo poiskati točko A , za katero velja $AB = c$ in $AC = b$.

Če bi taka točka obstajala, tedaj v trikotniku $\triangle ABC$ označimo z D nožišče višine na stranico \overline{BC} . Označimo $BD = x$ in $AD = y$; tedaj sledi $DC = a - x$ in Pitagorov izrek za trikotnika $\triangle ABD$ ter $\triangle ACD$ nam da

$$\begin{aligned} c^2 - x^2 &= y^2 = b^2 - (a - x)^2 \\ c^2 - x^2 &= b^2 - a^2 + 2ax - x^2 \\ 2ax &= a^2 + c^2 - b^2 \\ x &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \quad \text{in} \quad y = \sqrt{c^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Sedaj vemo, kakšen trikotnik iskati, ter začnimo od začetka. Imamo tri pozitivna števila a , b in c , za katera velja $a \geq b \geq c$. Definiramo $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$. Ker je $a^2 \geq b^2$ in $c^2 > 0$, je $x > 0$. Želimo definirati $y = \sqrt{c^2 - x^2} = \sqrt{(c - x)(c + x)}$, pred tem pa moramo preveriti, če je izraz pod korenem nenegativen. Lahko izračunamo

$$\begin{aligned} c - x &= c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a} = \\ &= \frac{b^2 - (a^2 - 2ac + c^2)}{2a} = \frac{b^2 - (a - c)^2}{2a}. \end{aligned}$$

Ker velja $a < b + c$, sledi $a - c < b$ in ker sta tako $a - c$ kot tudi b nenegativni števili, je $(a - c)^2 < b^2$. Torej je $c - x > 0$.

Sedaj smo pripravljeni na konstrukcijo iskanega trikotnika. Naj bo \overline{BC} daljica dolžine a in naj bo $D \in \overline{BC}$ točka, za katero velja

$$BD = x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

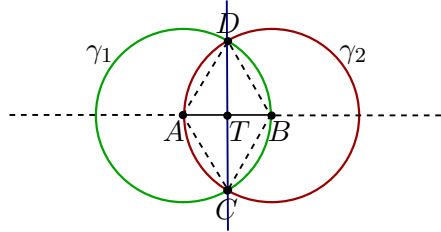
Naj bo \overrightarrow{DE} poltrak, pravokoten na premico \overleftrightarrow{BC} . Naj bo $A \in \overrightarrow{DE}$ točka, za katero velja

$$AD = y = \sqrt{c^2 - x^2}.$$

Tedaj je $x^2 + y^2 = c^2$ in $(a - x)^2 + y^2 = b^2$. Iz tega sledi, da je $AB = c$ in $AC = b$. Torej je $\triangle ABC$ res trikotnik z željenimi dolžinami stranic. \square

Dokaz izreka o dveh krožnicah Imejmo krožnico γ_1 s središčem P in polmerom a , ter krožnico γ_2 s središčem Q in polmerom b . Razdalja PQ med obema središčema je enaka c . Po predpostavki izreka je vsako od števil a , b in c manjše od vsote preostalih dveh števil. Torej obstaja trikotnik ΔRST , za katerega velja $RS = a$, $ST = b$ in $RT = c$. Naj bo A točka, za katero velja $AP = a = RS$ in $\angle APQ \cong \angle SRT$. Po aksiomu SKS sledi $\Delta SRT \cong \Delta APQ$, torej je $AQ = ST = b$. Torej točka A leži na krožnicah γ_1 in γ_2 . Naj bo B točka na drugem bregu premice \overleftrightarrow{PQ} kot A , za katero velja $\angle BPQ \cong \angle SRT$ in $BP = a = RS$. Po SKS sledi $\Delta SRT \cong \Delta BPQ$, torej je $BQ = ST = b$ in tudi točka B leži na krožnicah γ_1 in γ_2 . A in B sta torej presečišči krožnic γ_1 in γ_2 . Če bi obstajalo še tretje presečišče C , bi po Trditvi 97 sledilo, da so A , B in C nekolinearne točke, ki določajo oglišča trikotnika ΔABC . Ker pa ima vsak trikotnik po Izreku 101 le eno očrtano krožnico, dobimo protislovje. Torej velja $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{A, B\}$. \square

Sedaj lahko končno utemeljimo našo konstrukcijo simetrale dane daljice.



Slika 9.2: Konstrukcija simetrale daljice

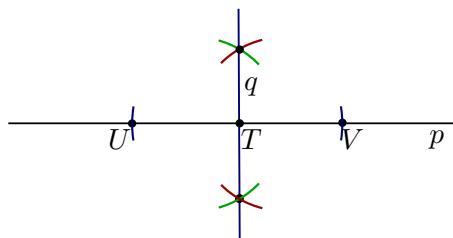
Zgled 19 (Utemeljitev konstrukcije v Zgledu 18). Označimo $a = AB$. Ker velja $a < 2a$, je vsako od števil a, a, a manjše od vsote preostalih dveh števil. Po izreku o dveh krožnicah sledi, da se krožnici γ_1 in γ_2 sekata v dveh točkah C in D , ki ležita na različnih straneh premice \overleftrightarrow{AB} . Torej daljica \overline{CD} seka premico \overleftrightarrow{AB} v neki točki T .

Ker točka T leži na daljici \overline{CD} , ki je tetiva obeh krožnic, T leži v notranjosti obeh krožnic γ_1 in γ_2 . Torej je $TA < AB$ in $TB < AB$, zato ne more veljati niti $T * A * B$ niti $A * B * T$. Torej je $A * T * B$. Trikotnika ΔCAD in ΔCBD sta skladna po izreku SSS, zato velja $\angle ADC \cong \angle BDC$. Po aksiomu SKS sledi $\Delta ADT \cong \Delta BDT$, torej je $AT = BT$, kota $\angle DTA$ in $\angle DTB$ pa sta skladna in obenem sokota. Zato je premica \overleftrightarrow{CD} pravokotna na nosilko daljice \overline{AB} in razpolavlja \overline{AB} , torej je simetrala daljice \overline{AB} .

Z uporabo zgleda 18 lahko poiščemo tudi razpolovišče poljubne daljice ali pa pravokotnico k dani premici.

Zgled 20 (Konstrukcija pravokotnice k dani premici skozi dano točko na tej premici). Dana je premica p in točka $T \in p$. Želimo konstruirati pravokotnico k premici p skozi točko T . Ker je p dana premica, mora biti dana vsaj še ena točka U na tej premici, ki ni enaka T . Potek konstrukcije:

1. Narišemo krožnico $\gamma = \mathcal{K}(T, TU)$ s središčem v točki T , ki vsebuje točko U .



Slika 9.3: Konstrukcija pravokotnice k dani premici

2. Krožnica γ seka premico p v dveh točkah; označimo $\gamma \cap p = \{U, V\}$.
3. Konstruiramo simetralo q daljice \overline{UV} kot v zgledu 18.

Ker točki U in V ležita na krožnici γ , sta enako oddaljeni od točke T , zato T po izreku o karakterizaciji simetrale daljice leži na premici q . Iz tega sledi, da je q iskana pravokotnica k premici p skozi točko T .

Zgled 21 (Konstrukcija pravokotnika z dano stranico in dano dolžino druge stranice). Dane so točke P , Q in R . Želimo konstruirati pravokotnik $\square PQST$, za katerega velja $\overline{PT} \cong \overline{PR}$. Potek konstrukcije:

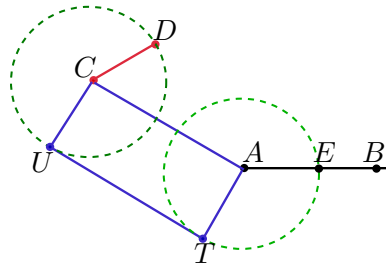
1. Narišemo premico \overleftrightarrow{PQ} .
2. Konstruiramo pravokotnico p k premici \overleftrightarrow{PQ} v točki P .
3. Narišemo krožnico $\gamma = \mathcal{K}(P, PR)$ s središčem v točki P , ki vsebuje točko R .
4. Označimo $\gamma \cap p = \{T, T'\}$.
5. Konstruiramo pravokotnico q k premici \overleftrightarrow{PQ} v točki Q .
6. Konstruiramo pravokotnico t k premici p v točki T .
7. Premici q in t se sekata v neki točki S^* .

* Če bi bili premici q in t vzporedni, bi iz tega sledilo, da sta tudi \overleftrightarrow{PQ} in \overleftrightarrow{PT} vzporedni, kar ne velja. Torej se premici q in t sekata v točki S . Štirikotnik $\square PQST$ ima dva para vzporednih nasprotnih stranic in trije njegovi notranji koti so pravi, torej je pravokotnik.

Zgled 22 (Prenašanje razdalj). Dani sta daljica \overline{CD} in poltrak \overrightarrow{AB} . Želimo konstruirati točko $E \in \overrightarrow{AB}$, za katero velja $\overline{AE} \cong \overline{CD}$. Potek konstrukcije:

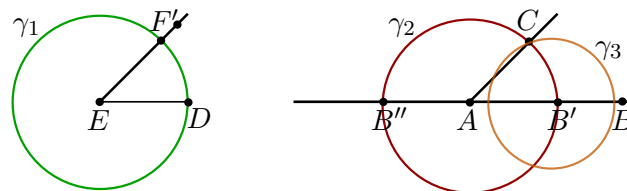
1. Konstruiramo pravokotnik $\square CATU$, za katerega je $\overline{CU} \cong \overline{CD}$. Torej je $\overline{AT} \cong \overline{CD}$.
2. Narišemo krožnico $\gamma = \mathcal{K}(A, AT)$ s središčem v točki A , ki vsebuje točko T .
3. Označimo $\gamma \cap \overrightarrow{AB} = \{E\}$.

Iz konstrukcije sledi, da je $\overline{AE} \cong \overline{CD}$.



Slika 9.4: Prenašanje razdalj

Z uporabo konstrukcije v zgledu 22 lahko pozabimo na kolapsibilnost našega evklidskega šestila in v nadaljnjih konstrukcijah privzamemo, da je šestilo običajno (torej z njim lahko dano razdaljo prenašamo vzdolž ravnine).



Zgled 23 (Konstrukcija skladnega kota). Dana sta poltrak \overrightarrow{AB} in kot $\angle DEF$. Želimo konstruirati kot $\angle BAC$, ki je skladen kotu $\angle DEF$. Potek konstrukcije:

1. Narišemo krožnico $\gamma_1 = \mathcal{K}(E, ED)$ s središčem v točki E , ki vsebuje točko D .
2. Označimo $\gamma_1 \cap \overrightarrow{EF} = \{F'\}$.
3. Narišemo krožnico $\gamma_2 = \mathcal{K}(A, ED)$ s središčem v točki A in polmerom ED . Ker točka $A \in \overrightarrow{AB}$ leži znotraj krožnice γ_2 , krožnica γ_2 seka premico \overrightarrow{AB} v dveh točkah B' in B'' , za kateri velja $B' * A * B''$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je B' presečišče krožnice γ_2 s poltrakom \overrightarrow{AB} .
4. Narišemo krožnico $\gamma_3 = \mathcal{K}(B', DF')$.
5. V trikotniku $\triangle DEF'$ po trikotniški neenakosti (Izrek 44) velja, da je dolžina poljubne stranice manjša od vsote dolžin preostalih dveh stranic. Torej je vsaka od razdalj AB' , ED in DF' manjša od vsote preostalih dveh, zato se krožnici γ_2 in γ_3 po izreku o dveh krožnicah sekata v dveh točkah: $\gamma_2 \cap \gamma_3 = \{C, C'\}$.
6. Narišemo poltrak \overrightarrow{AC} .

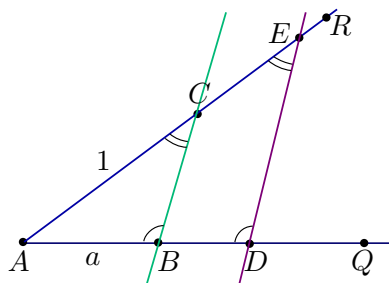
Dokažimo, da je $\angle BAC$ iskani kot. Trikotnika $\triangle DEF'$ in $\triangle B'AC$ imata paroma skladne stranice, saj velja $ED = EF' = AB' = AC$ in $DF' = B'C$, zato po izreku SSS sledi $\triangle DEF' \cong \triangle B'AC$. Zaradi skladnosti sta paroma skladna tudi notranja kota $\angle DEF \cong \angle BAC$.

9.1 Konstruktibilnost algebrskih izrazov

Naj bosta a in b pozitivni realni števili. Denimo, da so dane daljice dolžin 1 , a in b . Pokazali bomo, kako lahko z ravnalom in šestilom konstruiramo daljice dolžin

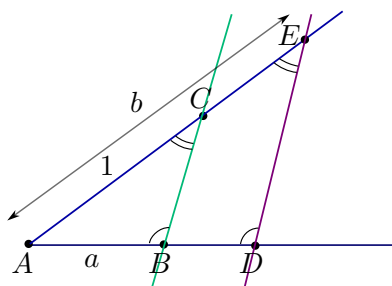
$$(1) a + b, \quad (2) |a - b|, \quad (3) \frac{1}{a}, \quad (4) ab, \quad (5) \frac{b}{a}, \quad (6) \sqrt{a}.$$

- (1) Prva konstrukcija je zelo enostavna. Na poljubni premici p konstruiramo daljico \overline{AB} dolžine a in daljico \overline{BC} dolžine b , tako da velja $A * B * C$. Dolžina daljice \overline{AC} je enaka $a + b$.
- (2) Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da velja $a \geq b$, torej je $|a - b| = a - b$. Konstruiramo točke A, B in C , za katere velja $A * B * C$, $AB = b$ in $AC = a$. Dolžina daljice \overline{BC} je enaka $BC = AC - AB = a - b$.



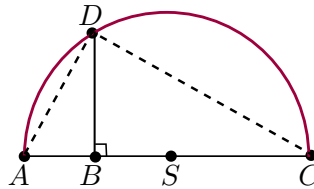
Slika 9.5: Konstrukcija obratne vrednosti danega števila

- (3) Začnemo s poljubnim kotom $\angle QAR$. Na poltraku \overrightarrow{AQ} konstruiramo točko B , za katero velja $AB = a$, ter točko D , za katero velja $AD = 1$. Na poltraku \overrightarrow{AR} konstruiramo točko C , za katero velja $AC = 1$. Konstruiramo poltrak \overrightarrow{DS} , tako da je $\angle ADS \cong \angle ABC$. Poltrak \overrightarrow{DS} seka poltrak \overrightarrow{AR} v točki E . Trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle ADE$ imata dva para skladnih notranjih kotov, zato sta podobna in po izreku o podobnih trikotnikih velja $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}$, torej je $AE = \frac{1}{a}$.



Slika 9.6: Konstrukcija produkta danih števil

- (4) Podobno kot pri (3) konstruiramo podobna trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle ADE$ s skupnim kotom pri oglišču A , za katera velja $AB = a$, $AC = 1$ in $AE = b$. Iz tega po izreku o podobnih trikotnikih sledi $\frac{AD}{a} = \frac{AE}{AC}$ oziroma $AD = ab$.
- (5) Za konstrukcijo daljice dolžine $\frac{b}{a}$ najprej po (3) konstruiramo daljico dolžine $\frac{1}{a}$, nato pa po (3) konstruiramo daljico dolžine $\frac{1}{a} \cdot b$.



Slika 9.7: Konstrukcija kvadratnega korena danega števila

- (6) Najprej konstruiramo daljici \overline{AB} in \overline{BC} , tako da velja $A * B * C$, $AB = 1$ in $BC = a$. Konstruiramo razpolovišče S daljice \overline{AC} . Narišemo krožnico $\gamma = \mathcal{K}(S, AS)$ s središčem v S in polmerom $AS = SC = \frac{1+a}{2}$. Konstruiramo pravokotnico k premici \overleftrightarrow{AC} v točki B , ki seka krožnico γ v točkah D in E . Po Talesovem izreku je kot $\angle CDA$ pravi kot. Po višinskem izreku je višina na hipotenuzo pravokotnega trikotnika $\triangle ACD$ geometrijska sredina projekcij obeh katet na hipotenuzo. Torej je $BD = \sqrt{AB \cdot BC} = \sqrt{a}$.

Definicija. Realno število x imenujemo **konstruktibilno število**, če je ob dani daljici dolžine 1 mogoče z ravnalom in šestilom konstruirati daljico dolžine x .

Iz zgoraj podanih konstrukcij sledi, da je vsako nenegativno racionalno število konstruktibilno. Poleg tega je tudi kvadratni koren iz poljubnega nenegativnega racionalnega števila konstruktibilno število.

Literatura

- [1] Borceux, F. *An axiomatic approach to geometry: Geometric Trilogy I*, Springer International Publishing Switzerland, 2014.
- [2] Euclid, ., Heath, T. L., Densmore, D. *Euclid's Elements: All thirteen books complete in one volume: The Thomas L. Heath translation*, Santa De., N. M.: Green Lion, 2002.
- [3] Horvat, E., *Zbirka nalog iz Elementarne geometrije*, Ljubljana, Pedagoška fakulteta, 2018.
- [4] Kay, D. C., *College geometry, a unified develepment*, CRC Press, 2012.
- [5] Moise, E. E., *Elementary Geometry from an advanced standpoint*, Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- [6] Venema, G. A., *Foundations of geometry*, Pearson Education, 2006.