

## Naloge KomA - Kompleksna števila

1. Dano je kompleksno število  $z = 3+4i$ . Določi realni in imaginarni del števil  $\frac{\bar{z}-2+2i}{2+i}$ ,  $\frac{1-i}{|z|+1}$ .
2. Opiši oziroma skiciraj naslednje množice v kompleksni ravnini:
  - (a)  $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+1-i| < 4\}$ ,
  - (b)  $\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z-1+i| < 4, \operatorname{Im}(z) > -2\}$ .
  - (c)  $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = 2r\}$ , kjer sta  $\alpha \in \mathbb{C}$  in  $r \in \mathbb{R}$  dani konstanti.
  - (d)  $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z}z - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z = r^2 - \alpha\bar{\alpha}\}$ , kjer sta  $\alpha \in \mathbb{C}$  in  $r \in \mathbb{R}$  konstanti.

Katere so odprte, zaprte, omejene, kompaktne, povezane s potmi, enostavno povezane?

3. Dano je oglišče  $z_1 = \sqrt{3} + i$  pravilnega sedemkotnika s središčem v 0. Poišči še ostala oglišča tega sedemkotnika. (Števila je dovolj podati v polarni obliki.)
4. Kompleksna števila  $-i$ ,  $-2-2i$  in  $-1+i\sqrt{3}$  zapiši v polarni obliki, ter izračunaj njihove 2024. potence in vse kubične korene.
5. Poišči vsa kompleksna števila  $z \in \mathbb{C}$ , ki rešijo enačbe
  - (a)  $z^2 + (1-i)z - i = 0$ .
  - (b)  $|z| + \bar{z} = 2 + i$ .
  - (c)  $|z|z^2 = i$ . (Nasvet: Pomagaj si s polarno obliko kompleksnega števila.)
6. Opiši preslikavo  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , ki je podana s predpisom  $f(z) = iz + 2$ . Poišči še  $f^{-1}$ .
7. Zapiši predpis preslikave  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , ki predstavlja zrcaljene čez imaginarno os.
8. Dana je funkcija  $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $f(z) = \frac{1}{z}$  (inverzija na enotsko krožnico). Kako  $f$  preslika krožnice oziroma premice? Določi tudi slike parih konkretnih primerov.
9. Dana je funkcija  $f: \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathcal{Z}_f \subset \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ .

- (a) Pokaži, da je  $f$  injektivna in določi njeno zalogo vrednosti. Poišči še inverzno funkcijo.
- (b) Dokaži, da  $f$  preslika enotsko krožnico brez točke 1 natanko na imaginarno os, t.j. za  $z$  z lastnostjo  $|z| = 1$  je  $\operatorname{Re}(f(z)) = 0$ , za  $z$  z lastnostjo  $\operatorname{Re}(z) = 0$  pa  $|f^{-1}(z)| = 1$ .
- (c) Pokaži še, da je slika enotskega kroga brez roba natanko leva polravnina, t.j. negativna realna polravnina. Kam pa  $f$  preslika zunanost enotskega polkroga?

Opomba: (Mobiuseve transformacije) Preslikave  $f: \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ ,  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , kjer  $ad-bc \neq 0$  in  $c \neq 0$  so bijekcije, ki slikajo krožnice in premice v krožnice ali premice, ter so natanko določene s slikami treh točk. Dobimo jih dobimo kot kompozicijo raztega, inverzije  $z \mapsto \frac{1}{z}$  in premikov;  $f(z) = \frac{a}{d} + \frac{ad-bc}{c^2} \frac{1}{z+\frac{d}{c}}$ .