

Naloge - Kompleksna analiza - Holomorfne funkcije

1. Dane so kompleksne funkcije

(a) $f(z) = \frac{z}{z-i}, z \in \mathbb{C} \setminus \{i\},$

(b) $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$

(c) $f(x, y) = x + i(2x + y), z \in \mathbb{C},$

(d) $f(x + iy) = e^{x^2 - y^2} + i(y \cos(2xy) - x \sin(2xy)), z \in \mathbb{C}.$

Naloga:

- Ugotovi, ali je dana funkcija holomorfna oziroma poišči njen kompleksni odvod. (Nasvet: Uporabi definicijo kompleksnega odvoda ali CR-sistem enačb.)
- Funkcije zapiši v odvisnosti od x, y namesto z, \bar{z} (oziroma obratno).
- Določi še $\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})$ in $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})$.

2. Poišči konstanto a , da bo funkcija $f(x, y) = \log(x^2 + y^2) + i \arctan \frac{axy}{x^2 - y^2}$ holomorfna na svojem definicijskem območju. (R: $a = 2$.)

3. Dana je holomorfna funkcija $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, ki preslika območje D na realno os. Pokaži, da je potem f konstantna funkcija.

4. Dana je funkcija $f(z) = \frac{1}{z}$. Premisli, da se premica $\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = 1$ in krožnica $|z - 1| = 1$ sekata pod pravim kotom. Ali se tudi njuni sliki glede na f sekata pod pravim kotom? Pokaži, da f ohrani kote tudi med kakšnima drugima objektoma.

Opomba: (biholomorfne preslikave) Bijektivne holomorfne funkcije (s holomorfnim inverzom) so konformne, t.j. ohranjajo kote med objekti.

Dokaz. Regularni poti $\alpha(t), \beta(t)$ v \mathbb{R}^2 , ki gresta skozi $(a, b) = \alpha(0) = \beta(0)$ se po definiciji sekata pod kotom med vektorjema $\alpha'(0) \neq 0$ in $\beta'(0) \neq 0$. Potem se preslikani poti $f(\alpha(t))$ in $f(\beta(t))$ sekata v (a, b) pod kotom med vektorjema $(f \circ \alpha)'(0) = Jf(\alpha(0))\alpha'(0)$ in $(f \circ \beta)'(0) = Jf(\beta(0))\beta'(0)$. Ker je f holomorfna (CR-sistem), je Jacobijeva matrika oblike $Jf(\alpha(0)) = aQ$, kjer a realno število in Q realna ortogonalna matrika.

* **Definicija:** Dvakrat zvezno odvedljiva funkcija $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ je harmonična na odprti množici $D \subset \mathbb{R}^2$, če je velja $\Delta u(x, y) := (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})(x, y) = 0, (x, y) \in D$; Δ je Laplaceov operator.

5. Pokaži, da sta realna komponenta $u(x, y)$ in imaginarna komponenta $v(x, y)$ holomorfne (dvakrat zvezno odvedljive) funkcije $f = u + iv$ harmonični funkciji.

(Nasvet: CR-sistem.)

6. Ali obstaja holomorfna funkcija (dvakrat zvezno odvedljiva) z imaginarnim delom $u(x, y) = x^3 + y^3$?

7. Naj bo dano število $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$. Pokaži, da je funkcija $u_c(z) = \frac{1-|z|^2}{|c-z|^2}$ harmonična za $z \in D(0, 1)$. (Nasvet: Dokaži, da je $u_c(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{c+z}{c-z}\right)$.)

Opomba/Neobvezno (Dirichletov problem na disku - milnična opna) Na robu enotskega diska $bD(0, 1)$ je dana zvezna funkcija $g: bD(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ (kovinski okvir). Velja, da je ustrezna harmonična rešitev (milnična opna) podana kot

$$U(z) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{e^{it}}(z) g(e^{it}) dt, & z \in D(0, 1) \\ g(z), & z \in bD(0, 1) \end{cases}.$$

Zakaj je U harmonična na $D(0, 1)$?

8. Poišči (dvakrat zvezno odvedljivo) holomorfnu funkcijo $f = u + iv$, če je $f(0) = 1 + 2i$ in
- njen realni del $u(x, y) = 1 + x - 2xy$.
 - njen imaginarni del $v(x, y) = 2 - y + x^3 - 3xy^2$.

Funkcijo f zapiši z z, \bar{z} namesto z x, y . Utemelji še, da je f enolično določena. (Nasvet: Za poljubno holomorfnu $\tilde{f} = \tilde{u} + i\tilde{v}$ opazuj $f - \tilde{f}$.)

9. Dokaži/utemelji naslednje trditve:

- $e^{z+2\pi i} = e^z$,
- $\sin z$ in $\cos z$ sta holomorfni za vse $z \in \mathbb{C}$ in $\sin' z = \cos' z$, $\cos' z = -\sin' z$.
- $\operatorname{sh} z$ in $\operatorname{ch} z$ sta holomorfni za vse $z \in \mathbb{C}$ in $\operatorname{sh}' z = \operatorname{ch}' z$, $\operatorname{ch}' z = \operatorname{sh}' z$.
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$.
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin z$, $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$.
- Funkciji \sin in \cos imata le realne ničle.
- $\operatorname{sh}(iz) = i \sin z$, $\operatorname{ch}(iz) = \cos z$.

(Opomba: $e^{x+iy} := e^x(\cos y + i \sin y)$, $\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ in $\cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, ter $\operatorname{sh} z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ in $\operatorname{ch} z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$.)

10. Kako $f(z) = e^z$ preslika daljici $\{z = iy \mid 2\pi \leq y \leq 4\pi\}$, $\{z = 2 + iy \mid 0 \leq y \leq 2\pi\}$, premico $\{z = x + i\frac{\pi}{4} \mid x \in \mathbb{R}\}$ in pas $\{z = x + iy \mid x \in \mathbb{R}, 0 < y < 2\pi\}$?
11. Izračunaj e^i , $\log i$, $\sin i$, $\operatorname{ch} i$, $\cos\left(i + \frac{\pi}{2}\right)$, $(-1)^{\frac{1}{2}}$, i^i .
(Opomba: $\log z := \ln |z| + i \arg z$, $z^\alpha := e^{\alpha \log z}$.)
12. Reši enačbe:

- | | | |
|----------------------|----------------------|---------------------------------|
| (a) $e^z = 3 + 4i$, | (c) $e^z = \pi i$, | (e) $\operatorname{sh} z = 0$, |
| (b) $e^z = 2 - 2i$, | (d) $e^z = e^{iz}$, | (f) $\sin z = -i$, |