Naloge - Kompleksna analiza - Kompleksna integracija in Cauchyev izrek

1. Izračunaj integrale naslednjih funkcij:

   (a) $f(z) = z + \bar{z}^2$ po daljici od $-1 + 2i$ do $2 + i$,

   (b) $f(z) = |z|^2$ po robu pravokotnika z oglišči $z_1 = -2$, $z_2 = 2$, $z_3 = 2 + i$ in $z_4 = -2 + i$, orientiranega v smeri $z_1 z_2 z_3 z_4$.

   (c) $f(z) = \overline{z}e^{2z}$ po daljici od $z_1 = -1 + i$ do $z_2 = i$,

   (d) $f(z) = \frac{1}{z}$ po pozitivno orientirani krožnici z enačbo $|z| = 3$,

   (e) $f(z) = \frac{1}{z^3}$ po pozitivno orientirani krožnici z enačbo $|z| = 3$,

   (f) $f(z) = e^{2z}$ po paraboli $y = x^2$, $x \in [0, 1]$,

   (g) $f(z) = |z|\bar{z}$ po robu pozitivno orientiranega polkroga v zgornji polravnini s središčem 0 in radijem 1,

2. Naj bo $G\colon D \to \mathbb{C}$ holomorfna na $D \subset \mathbb{C}$, in $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ gladka na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Pokaži, da je potem funkcija $g(t) := G(\varphi(t))$ odvedljiva in velja:

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(t) = G'(\varphi(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(t), \qquad t \in (a, b),$$

   kjer je G' kompleksni odvod in $\cdot$ kompleksno množenje. Posebej, če ima holomorfna funkcija f kompleksni nedoločeni integral, t.j. obstaja holomorfna F, da je $F' = f$, potem velja naslednje pravilo o zamenjavi spremenljivk:

$$F(\varphi(t)) = \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(\varphi(t)))dt = \int f(\varphi(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(t)dt,$$

   ter analog Newton-Leibnitzove formule za kompleksni integral holomorfne funkcije f po poti γ:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(b)).$$

3. Z uporabo Cauchyjevega izreka izračunaj naslednje kompleksne integrale:

   (a) $f(z) = \sin(z^2)e^{3z}$ po elipsi s središčem v izhodišču in polosema 1 in 4,

   (b) $f(z) = ze^{2z}$ po paraboli $\gamma(t) = t + it^2$, $t \in [0, 1]$,

   (c) $f(z) = z^3$ po delu spirale $z = te^{-it}$, $t \in [\pi, 5\pi]$,

   (d) $f(z) = \frac{1}{z}$ po polkrožnici $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

4. Z uporabo Cauchyjevega izreka izračunaj integral

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2ax)dx, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

(Nasvet: Integriraj funkcijo $f(z) = e^{-z^2}$ po robu pravokotnika z oglišči $-R$, R, $R+ia$, $-R+ia$, kjer je R pozitivno število. Upoštevaj še, da je $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.)

5. Naj bo f holomorfna na disku $D(z_0, R)$ in z $F(z) := \int_{z_0}^{z} f(z)dz$ označimo kompleksni integral funkcije f po daljici od z_0 do z. Utemelji, da je F holomorfna disku $D(z_0, R)$ in velja $F' = f$.

   Opomba: Velja splošneje, da ima vsaka holomorfna funkcija na enostavno povezanem območju primitivno funkcijo; integriramo po poljubni krivulji od z_0 do z.

6. Naj bo $u\colon D(z_0, R) \to \mathbb{R}$ realna harmonična funkcija.

   (a) Pokaži, da je potem $g(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ holomorfna na $D(z_0, R)$.

   (b) Utemelji, da ima g primitivno funkcijo G (t.j. $G' = g$), ter je $\mathrm{Re}(G) = u + C$ za neko konstanto $C \in \mathbb{R}$. Odtod sklepaj, da je $v := \mathrm{Im}(G)\colon D(z_0, R) \to \mathbb{R}$ harmonična konjugiranka u (t.j. $f := u + iv$ je holomorfna).

7. Z uporabo Cauchyjeve integralske formule izračunaj integrale po pozitivno orientirani sklenjeni krivulji:

   (a) $\int_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^3}dz$,

   (b) $\int_{|z-i|=1} \frac{z\sin(\pi z)}{(z-i)^2}dz$,

   (c) $\int_{|z-1+i|=1} \frac{z^3}{z^2+9}dz$,

   (d) $\int_{|z-i|=1} \frac{e^{2z}}{1+z^2}dz$.

8. Z uporabo Cauchyjeve integralske formule izračunaj integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}dx$.
   (Nasvet: Izračunaj integral $\int_K \frac{e^{iz}}{1+z^2}$ po pozitivno orientirani sklenjeni krivulji K, ki je rob območja $L = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \geq 0,\ |z| \leq R\}$, $R > 1$.)

9. Naj bo f holomorfna na območju $D \supset \overline{D}(w, R)$. Z uporabo Cauchyjeve integralske formule dokaži izrek o povprečni vrednosti za holomorfne funkcije:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(w + Re^{it})dt.$$

   Ali kaj podobnega velja tudi v realnem, t.j. ali za gladko funkcijo g na intervalu $I \supset (a - r, a + r)$ velja $g(a) = \frac{1}{2}(f(a - r) + f(a + r))$?

10. (Cauchyjeve ocene) Naj za holomorfno funkcijo na disku $D(a, r)$ s središčem v a in radijem r velja $|f(z)| \leq M$ za vse $z \in D(a, r)$. Dokaži, da potem veljajo ocene $|f^{(n)}(a)| \leq \frac{M\,n!}{r^n}$.

11. Naj bo f holomorfna na $\mathbb{C}$ in $|f(z)| \geq 1$ za vse $z \in \mathbb{C}$. Pokaži, da je f konstantna.