IPA - Kompleksna analiza - Analitične funkcije

1. Razišči konvergenco naslednjih vrst kompleksnih števil:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{2}{n}i)$,

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2}-\frac{i}{2})^n$,

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(3+4i)^n}{6^n}$,

2. Določi območja (enakomerne) konvergence naslednjih potenčnih vrst oziroma funkcijskih vrst (razišči tudi konvergenco na robu območij):

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$,

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}(z-2)^n$,

3. Dane so funkcije:

   (a) $f(z)=2z^3-3z^2-4z+1, \quad z_1=0,\, z_2=1,$

   (b) $f(x)=e^{2z}, \quad z_1=0,\, z_2=1,\, z_3=i,$

   (c) $g(z)=e^{2\pi z}-1, \quad z_0=i.$

   (d) $f(z)=6\sin(z^3)+z^3(z^6-6), \quad z_0=0,$

   (e) $f(x)=\cos(z), \quad z_0=i,$

   (f) $f(x)=\frac{1}{1+z}, \quad z_1=0,\, z_2=-1,\, z_3=i,$

   (g) $f(z)=z^2(e^{z^2}-1), \quad z_0=0,$

   (h) $f(z)=\frac{z}{3-2z-z^2}, \quad z_1=-1,\, z_2=0,$

   - Funkcijo f razvij v Taylorjevo vrsto okoli danih točk, določi območja konvergence dobljene vrste in izračunaj $f^{(2023)}(z_0)$ in $f^{(2024)}(z_0)$:
   - Določi stopnjo ničle funkcije f v danih točkah.

4. Dani sta taki holomorfni funkciji f in g na območju D, da je $f(z)g(z)=0$ za vse $z \in D$. Pokaži, da je potem vsaj ena izmed funkcij f oziroma g identično enaka 0. Ali kaj podobnega velja tudi za realni gladki (odvedljivi) funkciji na nekem intervalu?

5. Pokaži, da za holomorfne funkcije velja princip minima, t.j. če je f holomorfna na območju D in $|f|$ doseže lokalni minimum v točki $a \in D$, potem $f(a)=0$, ali pa je f konstantna na D.
   (Nasvet: Če $f(a)\neq 0$, potem upoštevaj princip maksima za $\frac{1}{f}$ na okolici točke a.)

6. Naj bo f holomorfna funkcija na območju D, ki je zvezna do roba bD, t.j zvezna na $\overline{D} = D \cup bD$. Naj obstaja še taka pozitivna konstanta $c \geq 0$, da je $|f(z)| = c$ za vse $z \in bD$. Dokaži, da je potem f konstantna ali pa ima ničlo na D.
(Nasvet: Upoštevaj principa maksima in minima za funkcijo f oziroma $\frac{1}{f}$, če f nima ničle.)

7. Določi izolirane singularne točke danih funkcij in ugotovi, kakšne vrste so:

   (a) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$,

   (b) $f(z) = \frac{z^2+1}{(z-1)z}$,

   (c) $f(z) = \frac{1}{1-e^z}$,

   (d) $f(z) = z\sin(\frac{1}{z})$.

   (e) $f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$,