

5. sklop seminarskih nalog - IPA - Kompleksna analiza - Cauchyjeva integralska formula

1. (Jure Željko) Z uporabo Cauchyjeve integralske formule izračunaj integrale po pozitivno orientirani sklenjeni krivulji:

(a)  $\int_{|z-i|=1} \frac{e^{2z}}{1+z^2} dz.$

(b)  $\int_{|z-i|=1} \frac{z \sin(\pi z)}{(z-i)^2} dz.$

(c)  $\int_{|z+i|=2} \frac{\cos(z)}{z^3} dz.$

2. (a) Direktno in z uporabo Cauchyjeve formule izračunajte integral  $\int_K \frac{e^{iz}}{1+z^2}$  po pozitivno orientirani sklenjeni krivulji  $K$ , ki je rob polkroga  $L = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) \geq 0, |z| \leq R\}$ ,  $R > 1$ .

- (b) Z uporabo enakosti, dobljene v (a), izračunaj integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx.$$

Nasvet: Dobljeno enakost limitirajte z  $R \rightarrow \infty$ ; pri tem lahko upoštevate:

$$\left| \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{1+(Re^{it})^2} Re^{it} dt \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{e^{iRe^{it}}}{1+(Re^{it})^2} Re^{it} \right| dt \leq \int_0^\pi \frac{R}{R^2-1} dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$