

1. Reši naslednje diferencialne enačbe z ločljivima spremenljivkama:

- |                          |             |                           |              |
|--------------------------|-------------|---------------------------|--------------|
| (a) $y' = 2y + 3,$       | $y(0) = 1.$ | (e) $xy^2y' = 1 - x^2,$   | $y(1) = 1,$  |
| (b) $y' = (1 + x^2)y^2,$ | $y(1) = 2,$ | (f) $(1 + e^x)yy' = e^x,$ | $y(0) = 1,$  |
| (c) $xy^2y' = 1 + x^4,$  | $y(1) = 1,$ | (g) $xy^2 = e^{-x}y',$    | $y(0) = -1,$ |
| (d) $y' = -2y^2e^{2x},$  | $y(0) = 2$  | (h) $(x^2 - 1)y' = 2y,$   | $y(0) = 1,$  |

2. (Logistična funkcija/Verhulst/Quetelet) Naj  $y(t)$  označuje delež populacije v času  $t$ . Predpostavimo, da je hitrost spreminjanja populacije (t.j.  $y'$ ) sorazmerna  $y(1 - y)$ .

- (a) Utemeljite in rešite diferencialno enačbo  $y'(t) = ky(t)(1 - y(t))$ .
- (b) Skicirajte graf  $y(t)$  za  $k = 1$  in  $y(0) = \frac{1}{2}$ . (Izračunajte  $y'$  in  $y''$  in določite intervale naraščanja/padanja ter konveksnosti/konkavnosti.)

3. (Gompertz/Makeham funkcija) Za opis dela populacije iste starosti (umrljivost) je uporaben naslednji model:

$$y' = -(Be^{kt} + A)y,$$

kjer sta  $A$  in  $B$  realni konstanti.

4. V hladilniku vzdržujemo konstantno temperaturo 5 stopinj Celzija. Vanj postavimo mleko, ki ima temperaturo 25 stopinj Celzija. Kolikšna je po eni uri temperatura mleka, če se po pol ure ohladi na 15 stopinj Celzija. Upoštevaj, da je ohlajanje telesa premosorazmerno razliki med temperaturo telesa in temperaturo okolice.

5. Poišči krivuljo skozi točko  $(1, 1)$ , za katero velja, da katerakoli tangenta na krivuljo odreže na  $x$ -osi odsek, ki je enak dvakratniku abscise dotikališča tangente.

6. Med neko kemijsko reakcijo iz snovi  $A$  nastaja snov  $B$ , pri čemer je hitrost spreminjanja mase  $A$  v času  $t$  sorazmerna kvadratu mase  $A$ , prisotne v času  $t$ . Kolikšna je masa  $A$  po dveh urah, če je na začetku masa  $A$  enaka 60 g, po eni uri pa 10 g.

7. Reši naslednje linearne diferencialne enačbe:

- |                         |                               |              |
|-------------------------|-------------------------------|--------------|
| (a) $y' - y = 2x.$      | (d) $y' - \frac{y}{x} = x^3,$ | $y(-1) = 2.$ |
| (b) $y' + y = x^2 + 1.$ | (e) $y' - 2xy = x,$           | $y(1) = 2.$  |
| (c) $xy' - y = 2x^{-1}$ | (f) $xy' - y = x^4,$          | $y(1) = -2.$ |

8. V neki sobi je  $100 \text{ m}^3$  zraka. V sobo prične s hitrostjo  $0.1 \text{ m}^3/\text{min}$  pritekati cigaretni dim, ki vsebuje 4 procente ogljikovega monoksida, z enako hitrostjo pa iz sobe izteka dobro premešana mešanica dima in zraka. Kako se v sobi spreminja koncentracija ogljikovega monoksida?

9. Z vpeljavo nove spremenljivke reši naslednje diferencialne enačbe

(a)  $y' = \frac{(x+y)^2}{2x^2}$ , (Nasvet: Uvedi novo spremenljivko  $u = \frac{y}{x}$ .)

(b)  $xy' - y = xe^{\frac{y}{x}}$ . (Nasvet: Uvedi novo spremenljivko  $u = \frac{y}{x}$ .)

(c)  $xy' - y = xy^{-2}$ . (Nasvet: Uvedi novo spremenljivko  $z = y^3$ .)

(d)  $y' - y = -x^2y^{-1}$ , (Nasvet: Uvedi ustrezno novo spremenljivko  $z = y^2$ .)

10. Pokaži, da je dana diferencialna enačba eksaktna in jo reši:

(a)  $(3x^2 - 6xy)dx - (3x^2 + 2y)dy = 0$ ,  $y(1) = -1$ .

(b)  $(y^2 - 1)dx + (2xy - \sin y)dy = 0$ ,  $y(0) = 1$ .

(c)  $(x^2 + \frac{y}{x})dx + \ln x dy = 0$ ,

(d)  $(e^x + \frac{y}{x})dx + (\ln x + \frac{1}{y})dy = 0$ ,

11. S Picardovo iteracijo izračunajte prve tri približke rešitve dane diferencialne enačbe:

(a)  $y' = x^2 + y^2$ ,  $y(0) = 1$ .

(b)  $y' = e^x + y^2$ ,  $y(0) = 0$ .

12. Skicirajte polje naklonov dane diferencialne enačbe in z Eulerjevo metodo izračunajte približno rešitev v okolici  $y(0) = 1$ ; napravite 5 korakov dolžine  $\frac{1}{4}$ :

(a)  $y' = y + 1$ ,

(b)  $y' = 1 + (x - y)^2$ ,

(c)  $y' = e^{-y^2} + x^2$ .