

IPA - Naloge - Diferencialne enačbe - Sistemi 2×2 linearnih enačb 1. reda in linearne enačbe 2. reda s konstantnimi koeficienti

1. Dani so sistemi linearnih diferencialnih enačb:

$$(a) \begin{cases} y' = 3y \\ z' = y + z \end{cases},$$

$$(e) \begin{cases} y' = 2y - z + x \\ z' = -y + 2z + 1 \end{cases}.$$

$$(b) \begin{cases} y' = y - 4z \\ z' = 4y - 7z \end{cases},$$

$$(f) \begin{cases} y' = y - z + e^x \\ z' = 2y + 4z + 1 \end{cases}.$$

$$(c) \begin{cases} y' = -y - z \\ z' = 2y - z \end{cases},$$

$$(g) \begin{cases} y' = -2y - 4z + 1 + 4x \\ z' = -y + z + \frac{3}{2}x^2 \end{cases},$$

$$(d) \begin{cases} y' = 2y - z \\ z' = 3y - 2z \end{cases},$$

$$(h) \begin{cases} y' = 4y - 2z + x^{-3} \\ z' = 8y - 4z - x^{-2} \end{cases},$$

- Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike ustreznega homogenega sistema in zapiši rešitev homogenega dela sistema.
- Poišči partikularno rešitev sistema in zapiši splošno rešitev sistema.
- Reši sistem pri začetnih pogojih $y(0) = 3$ in $z(0) = -2$.
- Sistem prevedi do linearne diferencialne enačbe drugega reda.

2. Reši naslednje diferencialne enačbe tako, da znižaš njihov red

$$(a) x^2 y'' + x y' = 1,$$

$$(b) y''' - y'' = x^2,$$

3. Reši naslednje diferencialne enačbe

$$(a) y'' + 4y = 0, \quad y'(0) = 6, y(0) = 2, \quad (\text{nevsiljeno nihanje})$$

$$(b) y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y'(0) = -4, y(0) = 2, \quad (\text{dušeno nihanje})$$

$$(c) y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y'(0) = -1, y(0) = 1,$$

$$(d) y'' + 2y' + y = 0, \quad y'(0) = -4, y(0) = 2,$$

$$(e) y'' - y' - 6y = (2x - 3)e^x, \quad y(0) = -1 \text{ in } y'(0) = 2$$

$$(f) y'' + y' - 6y = 4e^{2x}, \quad y(0) = 1 \text{ in } y'(0) = -2.$$

$$(g) y'' - 2y' = e^{3x} + x + 1, \quad y(0) = -1 \text{ in } y'(0) = 2,$$

$$(h) y'' + 0.125y' + y = 3 \cos(2x), \quad y'(0) = 0, y(0) = 2, \quad (\text{resonanca})$$

$$(i) y'' - 2y' + 5y = e^{-x} \cos(2x), \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

$$(j) y'' - 2y' + 5y = e^x \cos(2x), \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

4. Reši enačbo $y'' - y' - 2y = 0$, $y'(0) = 2$, $y(0) = \alpha$. Poišči še maksimum rešitve na intervalu $[0, \infty)$. Določi α , da bo $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$.
5. Na vzmet obesimo utež, ki zaniha okrog razmnovesne lege. Pospešek y'' je sorazmeren odmiku y od ravnovesne lege v času t , t.j. $y'' + Ly = 0$, kjer je L konstanta - razmerje med koeficientom vzmeti in njeno maso. Kako niha utež, če je $y(0) = 4$, $y'(0) = 40$, $y''(0) = 400$?
6. Ko na utež obesimo na vzmet s težo 20 gramov, se ta raztegne za 3 centimetre. Nato utež izmaknemo za 3 centimetre in spustimo, da zaniha z $y'(0)$ je 1 centimeter/sekundo. Opiši gibanje vzmeti. Določi amplitudo in frekvenco ($A = R \cos(\delta)$, $B = R \sin(\delta)$).
7. Reši naslednje diferencialne enačbe:

$$(a) \quad y'' + 4y' + y = x^{-2}e^{-2x}, \quad (c) \quad y'' + 4y = \frac{3}{\sin(2x)},$$

$$(b) \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^{2x}}{1+x^2}. \quad (d) \quad y'' - y = \frac{1}{x}$$

(Nasvet: Enačbo prevedi na sistem 2 linearnih enačb ali uporabi metodo variacije konstante z nastavkom $y = Ay_1 + by_2$, kjer sta y_1, y_2 rešitvi homogene enačbe, odvoda funkcij A in B pa rešitvi sistema $A'y_1 + B'Y_2 = 0$, $A'y_1' + B'Y_2' = f$, f desna stran diferencialne enačbe.)

8. S pomočjo razvoja v vrsto reši naslednje diferencialne enačbe:

$$(a) \quad y'' + k^2x^2y = 0, \quad x_0 = 0,$$

$$(b) \quad y'' + xy = 0 \text{ (Airyjeva enačba)}, \quad x_0 = 0,$$

$$(c) \quad y'' + xy + 2y = 0, \quad x_0 = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -1,$$

$$(d) \quad y'' - 2xy - \lambda y = 0 \text{ (Hermiteova enačba)},$$

$$(e) \quad y'' + x^3y + 3x^2y = 0,$$

$$(f) \quad (1 - x^2)y'' - 2xy' - \alpha(\alpha + 1)y = 0 \text{ (Legendrova enačba)},$$