

Verjetnost in statistika 2023/24

1. kolokvij, 6.12.2023

PRIIMEK IN IME: _____

1. [6x2=12 točk]

Velja ali ne velja? Utemeljite.

- Če sta dogodka A, B neodvisna, potem sta nezdružljiva.
- Pri poskusu »Vržemo 3 kovance« je vseh dogodkov natanko 256.
- Vržemo 3 kocke. Označimo $A_i \equiv$ največja padla vrednost je i . Potem je $\{A_1, A_2, \dots, A_6\}$ popoln sistem dogodkov.
- Za binomske simbole velja $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
- Iz običajnega kupa 52 kart izvlečemo 3 karte. Verjetnost, da smo izvlekli tri različne barve, je enaka $\frac{13^2}{25 \cdot 17} \doteq 0,398$.
- Vržemo 2 pošteni kocki. Verjetnost, da je padla vsaj ena šestica, če je vsota pik vsaj 10, je enaka 0,8.

2. [2+3+2=7 točk]

Biatlonec ima na strelišču 5 strel in 5 tarč. V posameznem strelu zadane tarčo z verjetnostjo 0,6.

- Kakšna je verjetnost, da tarčo prvič zadane v tretjem strelu?
- Kakšna je verjetnost, da zadane vsaj štiri tarče?
- Kakšna je verjetnost, da zadane vse tarče, če ima na voljo še en dodaten strel?

3. [5+2=7 točk]

Imamo 8 kovancev, 7 poštenih in enega goljufivega, pri katerem pade grb z verjetnostjo 0,9.

- Izberemo naključni kovanec in ga vržemo petkrat zapored. Vselej pade grb. Kakšna je verjetnost, da je izbrani kovanec goljufiv?
- Naključno izberemo 3 različne kovance in jih vržemo. Naj bo X število padlih grbov. Določite verjetnosti $P(X = x)$ za vse ustrezne $x \in X(S)$.

4. [4+3=7 točk] Imamo 8 posod. V treh so v vsaki 3 bele in 2 črni krogli, v štirih so v vsaki 4 bele in 3 črne, v eni pa je po 1 bela in 5 črnih krogel. Izberemo naključno posodo in brez vračanja izvlečemo 3 krogel.

- Kakšna je verjetnost, da dobimo 1 belo in 2 črni krogli?
- Kakšna je verjetnost, da sta bili v izbrani posodi 2 črni krogli, če smo dobili 1 belo in 2 črni krogli?

5. [4+3=7 točk] Slučajna spremenljivka je podana s shemo porazdelitve $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4a^2 & a & 2a^2 \end{pmatrix}$.

- Določite vrednost parametra a in izračunajte pričakovano vrednost $E(X)$.
- Skicirajte grafa verjetnostne funkcije $p_X(x)$ in in kumulativne porazdelitvene funkcije $F_X(x)$.

Rešitev:

1.

a) Ne velja. Npr. pri metu 2 kovancev sta dogodka »pade grb na prvem« in »pade grb na drugem« neodvisna, a združljiva.

b) Da. Imamo 8 izidov in $2^8 = 256$ dogodkov.

c) Da, dogodki so ločeni in imajo neničelno verjetnost, njihova unija vsebuje vse možne izide.

d) Da, to je identiteta »izbira ekipe in kapetana«. Zlaska jo preverimo tudi algebraično.

e) Da. Ugodne izide preštejemo tako, da izberemo 3 barve od štirih in po eno karto vsake izbrane barve. Torej je verjetnost enaka

$$\frac{\binom{4}{3}\binom{13}{1}\binom{13}{1}\binom{13}{1}}{\binom{52}{3}} = \frac{13^2}{17 \cdot 25}$$

f) Izidov z vsoto vsaj 10 je 6, od tega jih ima 5 vsaj eno šestico. Iskana pogojna verjetnost je $5/6$.

2.

a) Najprej dvakrat zgreši, nato zadane: $0,4^2 \cdot 0,6 = 0,096$.

b) Zadane natanko štirikrat ali pa natanko petkrat:

$$\binom{5}{4} 0,6^4 \cdot 0,4 + 0,6^5 = 0,337.$$

c) Torej, zadane 5x zapored, ali pa zadane 4x v prvih pet strelih in potem še v šestem strelu:

$$0,6^5 + \binom{5}{4} 0,6^5 \cdot 0,4 = 0,233.$$

3.

a) Označimo A ... 5x pade grb, B ... izberemo goljufiv kovanec. Potem je $P(A|B) = 0,9^5 = 0,590$,

$P(A|B') = 0,5^5$, $P(B) = \frac{1}{8} = 0,125$. Sledi $P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')} = 0,733$.

b) Verjetnost, da je med izbranimi tremi tudi goljufiv kovanec, je $P(G) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{3}{8}$. Zato izračunamo

denimo $P(X = 0) = P(X = 0|G)P(G) + P(X = 0|G')P(G') = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} = \frac{28}{320}$.

Podobno bi izračunali ostale vrednosti, vendar je dela precej, zato dobite 2 točki, če ste izračunali vsaj eno verjetnost (npr. $P(X = 0)$).

4.

a) A1 ... Izberemo posodo prvega tipa (2 črni), A2... izberemo posodo drugega tipa (3 črne), A3... izberemo posodo tretjega tipa (5 črnih). B ... izvlečemo 1 belo in 2 črni posodi. Iščemo

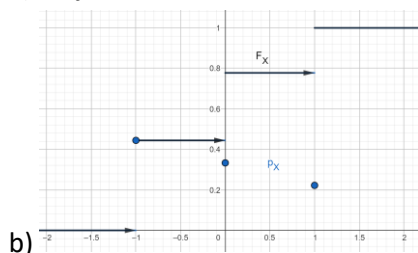
$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{\binom{5}{3}} \cdot \frac{3}{8} + \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}} \cdot \frac{4}{8} + \frac{\binom{1}{1}\binom{5}{2}}{\binom{6}{3}} \cdot \frac{1}{8}$$

Dobimo $97/280$ oziroma $0,346$.

b) $P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} = \frac{63}{194} = 0,235$.

5.

a) Veljati mora $4a^2 + a + 2a^2 = 1$, od koder dobimo $a = \frac{1}{3}$ in od tod $E(X) = -1 \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = -\frac{2}{9}$.



Verjetnost in statistika 2023/24

2. kolokvij in pisni izpit, 26.1.2024

PRIIMEK IN IME: _____

1. [5x2=10 točk]

Določite tip slučajne spremenljivke in izračunajte rezultat s pomočjo računalnika:

- Vržemo 20 poštenih kovancev. Kakšna je verjetnost, da pade vsaj 13 grbov?
- Zavarovalnica ima v povprečju 42 škodnih dogodkov na dan. Kakšna je verjetnost, da bo jutri več kot 50 škodnih dogodkov?
- Življenjska doba elektrode je eksponentno porazdeljena s povprečjem 1 časovno enoto. Kakšna je verjetnost, da bo naključna elektroda trajala vsaj 2 časovni enoti?
- Rezultati nekega preizkusa znanja so normalno porazdeljeni s povprečjem 50 in standardnim odklonom 6,9. Kakšna je verjetnost, da je naključno izbrani učenec dosegel vsaj 57 točk?
- Biatlonec zadane tarčo z verjetnostjo 0.7. Strelja, dokler ne zadane 5 tarč. Kakšna je verjetnost, da bo največ dvakrat zgrešil?

2. [4x2=8 točk]

Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka z gostoto $f_X(x) = \begin{cases} c(3-x), & 1 < x < 3 \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$

- Določite vrednost c in skicirajte graf za $f_X(x)$.
- Zapišite predpis porazdelitvene funkcije $F_X(x)$ in skicirajte njen graf.
- Določite pričakovano vrednost $E(X)$.
- Določite mediano $\text{med}(X)$.

3. [4+2=6 točk]

V vreči so 3 bele in 2 črni kroglici. Naključno izvlečemo 3 kroglice zapored brez vračanja. Naj bo X število vseh belih med izvlečenimi in Y število vlečenj pred prvo izvlečeno belo kroglico.

- Zapišite tabelo verjetnostne porazdelitve $P(X = x, Y = y)$.
- Brez računanja ocenite predznak in absolutno vrednost korelacije $\rho(X, Y)$.

4. [4+4+4=12 točk]

Dana je tabela verjetnostne porazdelitve para diskretnih slučajnih spremenljivk.

$X \setminus Y$	-1	0	1	2
0	0.1	0.0	0.2	0.1
1	0.1	0.0	0.1	0.1
2	0.1	0.1	0.1	0.0

- Določite robni porazdelitvi X, Y ter izračunajte $E(X)$ in $E(Y)$.
- Določite porazdelitvi X^2, Y^2 ter izračunajte $\sigma(X), \sigma(Y)$.
- Določite porazdelitev XY ter izračunajte $\text{cov}(X, Y)$ in $\rho(X, Y)$.

5. [2+2=4 točke]

Gostota para zveznih slučajnih spremenljivk je podana s predpisom

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{2}, & 0 < x < 2, 0 < y < 1; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

- Izračunajte verjetnost $P(X < 1)$.
- Izračunajte verjetnost $P(Y < X)$.

6. [5+5=10 točk SAMO IZPIT]

Imamo 10 kock, 8 poštenih in 2 goljufivi, pri katerih pade šestica z verjetnostjo 0,5, ostale vrednosti pa so enako verjetne. Izberemo naključno kocko in jo vržemo trikrat zapored.

- a) Kakšna je verjetnost, da padejo 3 šestice?
- b) Kakšna je verjetnost, da je izbrana kocka goljufiva, če so padle tri šestice?

REŠITEV

1.

- a) $X \sim \text{Bin}(20, 1/2), P(X > 12) = 0,132.$
- b) $X \sim \text{Poiss}(42), P(X > 50) = P(X \geq 51) = 0,098.$
- c) $X \sim \text{Exp}(1), P(X > 2) = 0,135.$
- d) $X \sim N(50, 47.61), P(X \geq 57) = 0,156.$
- e) $X \sim \text{Pas}(5, 0.7), P(X \leq 2) = 0,647.$

2.

- a) $c = \frac{1}{2}, \text{graf...}$
- b) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{-x^2+6x-5}{4}, & 1 \leq x \leq 3, \text{graf...} \\ 1, & x > 3 \end{cases}$
- c) $E(X) = \frac{10}{6} \doteq 1.67$
- d) $\text{med}(X) = 3 - \sqrt{2} \doteq 1.59$

3.

a)

$X \setminus Y$	0	1	2
1	$P(bcc) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = 0.1$	$P(cbc) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = 0.1$	$P(ccb) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} = 0.1$
2	$P(bbc) + P(bcb) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = 0.4$	$P(cbb) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = 0.2$	0
3	$P(bbb) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = 0.1$	0	0

- b) Korelacija je zmerno negativna, saj je Y majhen, če je X velik. (Račun pokaže, da je korelacija približno -0.5, kar lahko preverite za vajo).

4.

- a) $E(X) = 0.9, E(Y) = 0.5.$
- b) $\sigma(X) = 0.83, \sigma(Y) = 1.12.$
- c) $E(XY) = 0.20, \text{cov}(X, Y) = -0.25, \rho(X, Y) = -0,27$

5.

- a) $P(X < 1) = \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 \frac{x^3 y}{2} dx dy = \frac{1}{16}.$
- b) $P(Y < X) = \int_{y=0}^1 \int_{x=y}^2 \frac{x^3 y}{2} dx dy = \frac{47}{48}.$

6.

- a) $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A') = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{4}{5} = 0,0287.$
- b) $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = 0,9.$