

VERJETNOSTNI RAČUN IN STATISTIKA  
Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani

1. KOLOKVIJ

1. 12. 2017

1. Za vsako od naslednjih trditev ugotovite, ali je pravilna, ter odgovore natančno utemeljite:
  - (a) Če hkrati vržemo dve pošteni kocki, potem sta dogodka  $A \equiv$ (vsota pik na kockah je enaka 10) in  $B \equiv$ (vsota pik na kockah je večja od 10) enako verjetna.
  - (b) Če sta  $C$  in  $D$  nasprotna dogodka, potem sta  $C$  in  $D$  neodvisna.
  - (c) Če šestkrat zaporedoma vržemo pošteno kocko, potem je dogodek, da je pri tem padla vsaj ena šestica, bolj verjeten kot njegov nasprotni dogodek.
  - (d) Če ima poskus natanko 4 možne izide  $a, b, c, d$ , ki so vsi enako verjetni, potem sta dogodka  $\{a, b\}$  in  $\{b, c\}$  neodvisna.
  - (e) Slučajna spremenljivka  $X \equiv$ (število pik, ki padejo pri metu poštene kocke) ima pričakovano vrednost  $E(X) = 3$ .
2. V vreči je 6 rdečih in 10 zelenih žogic.
  - (a) Iz vreče naključno in brez vračanja izvlečemo 3 žogice. Kolikšna je verjetnost, da sta med izvlečenimi kroglicami natanko dve rdeči?
  - (b) Iz vreče naključno in z vračanjem vlečemo žogice do prve rdeče. Kolikšna je verjetnost, da smo vlekli natanko trikrat?
  - (c) Iz vreče naključno in z vračanjem izvlečemo 5 žogic. Kolikšna je verjetnost, da smo trikrat izvlekli rdečo?
  - (d) Iz vreče naključno in z vračanjem vlečemo žogice do tretje rdeče. Kolikšna je verjetnost, da smo vlekli natanko petkrat?

Rezultat zapišite v obliki okrajšanega ulomka.

3. V neki populaciji so zastopani trije fenotipi A, B in C. Porazdelitev fenotipov med očeti družin je naslednja: 37% očetov ima fenotip A, 27% očetov ima fenotip B in 36% očetov ima fenotip C. Naslednja tabela podaja porazdelitev fenotipov pri otrocih glede na fenotip starša.

	otrok A	otrok B	otrok C
oče A	18%	61%	21%
oče B	26%	60%	14%
oče C	55%	20%	25%

Na primer: 18% otrok, katerih oče ima fenotip A, ima tudi samih fenotip A. V opazovani populaciji izberemo naključnega otroka. Natančno odgovorite na spodnji vprašanji.

- (a) Kolikšna je verjetnost, da izbrani otrok nima fenotipa A?
- (b) Izbrani otrok nima fenotipa A. Kolikšna je verjetnost, da njegov oče nima fenotipa A?

Rezultat zapišite na dve decimalni mesti natančno.

4. Hkrati vržemo pošteno kocko in dva poštena kovanca. Naj bo  $a$  število pik, ki so padle na kocki, ter naj bo  $b$  število padlih grbov. Označimo z  $X$  razliko  $a - b$ .
- Poiščite in predstavite verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke  $X$ .
  - Izračunajte porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke  $X$  ter narišite njen graf.
  - Izračunajte pričakovano vrednost slučajne spremenljivke  $X$ .

**Vse odgovore natančno utemeljite.**

Točkovanje: 10+10+10+10 točk.

### REŠITVE

- Prostor dogodkov  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$  ima 36 enako verjetnih izidov. Ker velja  $A = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$  in  $B = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$ , imamo  $P(A) = P(B) = \frac{1}{12}$ , torej sta dogodka enako verjetna.
  - Če sta  $C$  in  $D$  nasprotna dogodka, velja  $P(C \cap D) = 0$  in  $P(C)P(D) = P(C)(1 - P(C))$ , torej nasprotna dogodka nista neodvisna, razen če gre za gotov in nemogoč dogodek.
  - Označimo z  $B$  dogodek, da je pri šestih metih kocke padla vsaj ena šestica. Nasprotni dogodek ima verjetnost  $P(B^C) = (\frac{5}{6})^6$ , zato velja  $P(B) > P(B^C)$  in je trditev pravilna.
  - Ker ima poskus natanko 4 enako verjetne izide, velja  $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$ . Torej je  $P(\{a, b\} \cap P(\{b, c\})) = P(\{b\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(\{a, b\})P(\{b, c\})$  in sta dogodka res neodvisna.
  - Slučajna spremenljivka  $X$  ima enakomerno porazdelitev in njena pričakovana vrednost je enaka  $E(X) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{7}{2}$ , torej trditev ni pravilna.
- Verjetnost je enaka  $P(A) = \frac{\binom{6}{2}\binom{10}{1}}{\binom{16}{3}} = \frac{15}{56}$ .
  - Verjetnost je enaka  $P(B) = (\frac{5}{8})^2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{75}{512}$ .
  - Verjetnost je enaka  $P(C) = (\frac{3}{8})^3 \cdot (\frac{5}{8})^2 \cdot (\frac{5}{2}) = \frac{3375}{16384}$ .
  - Verjetnost je enaka  $P(D) = \frac{10}{16} \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{6}{14} = \frac{9}{56}$ .
- Označimo z  $A_1, A_2$  oz.  $A_3$  dogodek, da ima oče fenotip  $A, B$  oz.  $C$ . Naj bo  $B_1, B_2$  oz.  $B_3$  dogodek, da ima otrok fenotip  $A, B$  oz.  $C$ .

- Po formuli za popolno verjetnost izračunamo

$$\begin{aligned} P(B_1^C) &= 1 - P(B_1) = 1 - (P(B_1|A_1)P(A_1) + P(B_1|A_2)P(A_2) + P(B_1|A_3)P(A_3)) = \\ &= 1 - 0,18 \cdot 0,37 - 0,26 \cdot 0,27 - 0,55 \cdot 0,36 = 0,67 \end{aligned}$$

- Uporabimo Bayesovo formulo in računamo:

$$\begin{aligned} P(A_1^C|B_1^C) &= 1 - P(A_1|B_1^C) = 1 - \frac{P(B_1^C|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B_1^C)} = \\ &= 1 - \frac{(1 - P(B_1|A_1)) \cdot P(A_1)}{0,67} = 1 - \frac{(1 - 0,18) \cdot 0,37}{0,67} = 0,55 \end{aligned}$$

4. (a)  $X(S) = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$p_X(-1) = p_X(6) = \frac{1}{24}, p_X(0) = p_X(5) = \frac{1}{8}, p_X(1) = p_X(2) = p_X(3) = p_X(4) = \frac{1}{6}.$$

(b)

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & ; \text{če } t < -1, \\ \frac{1}{24} & ; \text{če } -1 \leq t < 0 \\ \frac{1}{6} & ; \text{če } 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{3} & ; \text{če } 1 \leq t < 2 \\ \frac{1}{2} & ; \text{če } 2 \leq t < 3 \\ \frac{2}{3} & ; \text{če } 3 \leq t < 4 \\ \frac{5}{6} & ; \text{če } 4 \leq t < 5 \\ \frac{23}{24} & ; \text{če } 5 \leq t < 6 \\ 1 & ; \text{če } t \geq 6. \end{cases}$$

(c)  $E(X) = \frac{1}{24}(-1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 1) = 2,5$