

VERJETNOSTNI RAČUN IN
STATISTIKA
Zapiski predavanj

Primož Šparl

Ljubljana, oktober 2013
©Primož Šparl

Kazalo

I	Verjetnostni račun	1
1	Uvod v teorijo verjetnosti	3
1.1	Kratka zgodovina in različne interpretacije verjetnosti	3
1.2	Poskus, izidi in dogodki	5
1.3	Definicija verjetnosti	8
1.4	Osnove kombinatorike	14
2	Pogojna verjetnost in neodvisnost	19
2.1	Pogojna verjetnost	19
2.2	Neodvisnost dogodkov	24
2.3	Popolna verjetnost in Bayesova formula	28
3	Diskretne slučajne spremenljivke	37
3.1	Diskretne slučajne spremenljivke	38
3.2	Primeri diskretnih slučajnih spremenljivk	43
3.3	Upanje diskretnih slučajnih spremenljivk	46
4	Zvezne slučajne spremenljivke	55
4.1	Zvezne slučajne spremenljivke	55
4.2	Primeri zveznih slučajnih spremenljivk	59
4.3	Matematično upanje	62
4.4	Kvantili in mediana	68
5	Slučajni vektorji	71
5.1	Slučajni vektorji diskretnih slučajnih spremenljivk	71
5.2	Slučajni vektorji zveznih slučajnih spremenljivk	73
5.3	Neodvisnost slučajnih spremenljivk	76
5.4	Kovarianca in korelacija	78
5.5	Neenakost Čebiševa in zakon velikih števil	83

Del I

Verjetnostni račun

Poglavje 1

Uvod v teorijo verjetnosti

V tem poglavju si bomo za uvod ogledali zgodovinsko ozadje in različne interpretacije verjetnosti, nato pa se posvetili trem najpomembnejšim pojmom v teoriji verjetnosti: *poskus*, *dogodek* in *verjetnost*. Ogledali si bomo tudi nekaj osnovnih kombinatoričnih prijemov, ki jih bomo kasneje potrebovali pri izračunih verjetnosti posameznih dogodkov.

1.1 Kratka zgodovina in različne interpretacije verjetnosti

Pojem naključnosti in negotovosti sega v same začetke civilizacije. Že starodavna ljudstva so se ubadala z vprašanji kot so “Ali bo reka dovolj poplavlila naša polja, da bo na njih dozorelo žito?”, ali pa “Bomo letos doživeli manj napadov in plenilskih pohodov barbarskih plemen, ki nas obkrožajo, kot lani?” Seveda so se trudili, da bi bil delež negotovosti glede odgovora na ta vprašanja čim manjši.

Celo igre na srečo, ki so najbrž ena prvih asociacij ob misli na besedo “verjetnost”, segajo v čas okrog leta 3500 p.n.š. Že takrat naj bi namreč v Egiptu poznali igre na srečo, pri katerih so vlogo današnje kocke zamenjali razni predmeti izdelani iz kosti. Zagotovo pa so “kockanje” poznali leta 2000 p.n.š., saj so arheologi v grobnicah iz tistega obdobja našli kocke, ki so praktično identične današnjim kockam za igre na srečo. Od tistega časa naprej so bile igre na srečo, pri katerih imajo glavno vlogo kocke, ves čas prisotne.

Začetki “prave” teorije verjetnosti segajo v sredino 17. stoletja. V tistem času sta bili v Franciji zelo popularni naslednji dve igri: pri prvi je igralec stavil na to, da bo v štirih zaporednih metih kocke padla vsaj ena šestica, pri drugi pa da bo v 24 zaporednih metih dveh kock padla vsaj ena dvojna

šestica. Leta 1654 naj bi francoski “kockar” Chevalier de Méré pri svojih stavah opazil, da se prva izmed obeh iger večkrat konča z ugodnim izidom kot druga. Z vprašanjem, ali se da to tudi matematično utemeljiti, se je obrnil na uglednega matematika Blaise-a Pascal-a (1623 – 1662). Le-ta si je v zvezi s tem vprašanjem pričel dopisovati s Pierre-om de Fermat-om (1601–1665), s katerim sta nato začela razvijati prve zametke teorije verjetnosti (in med drugim dokazala, da je de Méré-jeva domneva pravilna). Morda ni odveč omeniti, da sta posamezne verjetnosti “kockarskih dogodkov” že pred tem izračunala Girolamo Cardano (1501–1576) in Galileo Galilei (1564–1642).

Teorija verjetnosti se je od časov Pascala in Fermata naprej ves čas razvijala in napredovala. Tako je danes sestavni del skoraj vseh vej znanosti. Uporablja se tudi v medicini, meteorologiji, astronomiji, marketingu, sociologiji, pravu, itd.

Kaj pa sploh naj bi bila verjetnost, ko govorimo o “dogodkih iz resničnega sveta”? Na neki načelni ravni očitno vsi zelo dobro razumemo ta pojem, saj ga v vsakdanjem življenju veliko uporabljamo. Govorimo o tem, da, čeprav smo vplačali LOTO-kombinacijo, “sedmice skoraj zagotovo ne bomo zadeli.” Ali pa da bo “jutri Olimpija najverjetneje zmagala.” Pa vendar zaenkrat nobena izmed možnih interpretacij verjetnosti, ki so jih doslej ponudili znanstveniki, ni splošno sprejeta med vsemi statistiki, filozofi in drugimi. Oglejmo si dve možni interpretaciji verjetnosti, vsaka izmed katerih je lahko zelo uporabna, ko naletimo na “resnične probleme”.

Prva je tako imenovana *statistična interpretacija* ali tudi interpretacija *relativne frekvence*. Pri tej interpretaciji si domišljamo, da lahko nek “poskus” ponovimo neomejeno krat, vsakič pri istih pogojih, štejemo pa kolikokrat se je zgodil “dogodek”, ki nas zanima. Razmerje med številom poskusov, ko se je dogodek zares zgodil, in številom vseh poskusov imenujemo *relativna frekvenca* ali pogostost tega dogodka. No, verjetnost dogodka naj bi bila po tej interpretaciji številka, pri kateri “se ustali” relativna frekvenca, ko izvedemo “zadostno število” poskusov. Najbrž je že takoj razvidno, kje so težave. Kaj pomeni “pod enakimi pogoji”? Kaj je “zadostno število”? In kaj pomeni to, da se relativna frekvenca “ustali”?

Druga interpretacija je *klasična*. Pri tej izhajamo iz predpostavke, da se poskus lahko konča na več možnih načinov, ki pa so vsi enako verjetni (na primer, pri metu kocke naj bi bilo vseh šest možnih števil pik enako verjetnih). V tem primeru potem tem “osnovnim dogodkom” priredimo enake verjetnosti, vsota katerih je enaka 1, nato pa vse ostale verjetnosti izračunamo na podlagi teh. Problem te interpretacije je v prvi vrsti ta, da samo verjetnost skušamo vpeljati preko pojma verjetnosti, poleg tega pa pogosto vseh možnih končnih situacij nekega poskusa ne moremo razdeliti na same enako verjetne dogodke.

Matematična teorija verjetnosti se z različnimi interpretacijami ne ukvarja. Njen cilj je razvijati metode in rezultate, s pomočjo katerih je, malce poenostavljeno povedano, moč izračunati verjetnosti “sestavljenih” dogodkov potem, ko so bile verjetnosti “enostavnim dogodkom” že določene. Zanima nas tudi, kako se te verjetnosti spremenijo, če izvemo kake dodatne informacije o poteku poskusa.

1.2 Poskus, izidi in dogodki

Dogovorimo se najprej, kaj razumemo kot poskus. Za nas bo *poskus* vsak proces, ki ga opravimo v točno določenih pogojih, pri tem pa so znana “vsa možna” končna stanja oziroma izidi.

ZGLED: Če imamo dano neko konkretno kocko (ki ni nujno uravnotežena), je lahko poskus met te kocke. Če imamo kup igralnih kart, je poskus dejanje, pri katerem iz tega kupa “naključno” izvlečemo tri karte. Če imamo 100 eurov, je lahko poskus naložba teh 100 eurov v delnice Krke d.d. za dobo petih let. In konec koncev, če še nismo opravili pisnega izpita pri tem predmetu, je lahko poskus tudi pisanje naslednjega pisnega izpita. ▲

In kaj je tedaj dogodek za nek poskus? *Dogodek* je pojav, ki je natanko opredeljen z nekim naborom možnih izidov poskusa v smislu, da se ta dogodek zgodi natanko tedaj, ko je bil izid poskusa eden izmed izidov iz tega nabora. Oglejmo si zopet nekaj zgledov.

ZGLED: Na primer, dogodek pri metu kocke je lahko “Pade šestica.” ali “Število pik, ki pade, je največ 4.” ali celo “Število pik, ki pade je vsaj 1.” Pri poskusu, kjer vlečemo karte, je eden izmed možnih dogodkov “Vse tri karte so srca.” ali pa “Med izvlečenimi kartami ni kralja.”. Pri poskusu naložbe 100 eurov v delnice Krke d.d. je eden izmed dogodkov “Po petih letih se vrednost delnic vsaj podvoji.” ▲

Da lahko pričnemo z matematično teorijo verjetnosti, je treba zgoraj omenjene pojme formulirati v matematičnem jeziku. Ker tu operiramo z matematičnimi objekti kot so množice in funkcije, so naslednje definicije dokaj naravne. Posamezne izide poskusa predstavimo kot elemente, ki jih bomo združevali v množice.

Definicija. Imejmo nek poskus. *Prostor izidov* za ta poskus, ki ga običajno

označimo z S , je množica vseh možnih izidov tega poskusa.

Glede na naše zgornje razmišljanje lahko torej dogodke definiramo takole.

Definicija. Imejmo nek poskus. Tedaj je *dogodek* za ta poskus vsaka podmnožica prostora izidov S tega poskusa. Dogodek S imenujemo *gotov dogodek*, dogodek \emptyset je *nemogoč dogodek*, vsi ostali dogodki (torej dogodki A , kjer je $\emptyset \subsetneq A \subsetneq S$) pa so *slučajni dogodki*.

Omenimo, da bomo dogodke praviloma označevali z velikimi tiskanimi črkami z začetka abecede, torej z A , B , C itd.

Gotov dogodek se torej zgodi v vsakem primeru, ne glede na konkretno izvedbo poskusa. Nemogoč dogodek se ne zgodi nikoli. Slučajni dogodek pa se včasih zgodi, včasih pa tudi ne. Za take dogodke torej ni mogoče v naprej z vso gotovostjo napovedati, ali se bodo zgodili ali ne. Seveda so natanko ti dogodki tisti, ki nas zares zanimajo.

ZGLED: Pri metu običajne kocke je dogodek “Pade šestica.” slučajen dogodek, saj šestica včasih pade, včasih pa tudi ne. Dogodek “Število pik, ki pade, je vsaj 1.” je seveda gotov dogodek. ▲

Glede na to, da so dogodki množice, lahko seveda z njimi počnemo vse, kar znamo početi z množicami.

Definicija. Naj bosta $A, B \subseteq S$ dogodka poskusa s prostorom izidov S . Tedaj je A *poddogodek* dogodka B , če je $A \subseteq B$. Dogodek $A \cup B$ imenujemo *unija* ali tudi *vsota* dogodkov A in B , dogodek $A \cap B$ pa *preseka* ali tudi *produkt* dogodkov A in B . Dogodka A in B sta *disjunktna* ali tudi *nezdružljiva*, če je njun produkt nemogoč dogodek, to je, če je $A \cap B = \emptyset$. Dogodek $S \setminus A$ označimo z \bar{A} in ga imenujemo *nasprotni dogodek* dogodka A .

ZGLED: Imejmo poskus, pri katerem hkrati vržemo tri kovance, majhnega, srednjega in velikega. Prostor izidov S tedaj sestoji iz osmih izidov, ki jih lahko poimenujemo takole:

$$S = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}.$$

Pri tem 0 pomeni, da je na pripadajočem kovancu padel grb, 1 pa, da je padla cifra (dogovorimo se še, da prvi znak predstavlja “vrednost” majhnega kovanca, drugi srednjega in tretji velikega kovanca). Izid 011 je torej izid, pri katerem je na majhnem kovancu padel grb, na ostalih dveh pa cifra.

Naj bo sedaj A dogodek, da je padla natanko ena cifra, B dogodek, da sta padla vsaj dva grba in C dogodek, da je na majhnem in velikem kovancu padlo enako. Tedaj je $A = \{001, 010, 100\}$, $B = \{100, 010, 001, 000\}$ in $C = \{000, 010, 101, 111\}$. Vidimo, da je A poddogodek dogodka B , to je, če se zgodi A , se zagotovo zgodi tudi B . Opazimo tudi, da nobena dva dogodka nista nezdružljiva in da je, na primer, produkt dogodkov A in C dogodek, da na majhnem in velikem kovancu pade grb, na srednjem pa cifra. ▲

Ko obravnavamo poskuse, pri katerih je prostor izidov zelo velik (na primer nešteven), se mnogokrat zgodi, da nas ne zanimajo prav vsi mogoči dogodki (torej vse podmnožice prostora izidov). V takih primerih zato vpeljemo tako imenovan prostor dogodkov, ki sestoji iz vseh dogodkov, ki nas zanimajo. Izkaže se, da mora tak prostor dogodkov zadoščati določenim pravilom, da potem vsa teorija velja tudi za takšne primere. Mi bomo obravnavali dovolj preproste primere, da se nam s takimi omejitvami ne bo potrebno ukvarjati. Zato sklenimo dogovor, da bo za nas množica dogodkov, ki jih obravnavamo, vedno kar celotna potenčna množica $\mathcal{P}(S)$.

Naloga 1.1. Imejmo poskus meta ene kocke in enega kovanca, kjer nas seveda zanima kaj pade na kocki in kaj na kovancu. Zapišite prostor izidov za ta poskus. Nato naslednje dogodke zapišite kot podmnožice prostora izidov:

- A - na kovancu pade grb natanko tedaj, ko je število pik na kocki liho.
- B - na kovancu pade grb, na kocki pa vsaj štiri pike.
- C - na kocki pade šestica.

Ali je kateri izmed teh dogodkov poddogodek drugega dogodka? Ali sta katera izmed dogodkov nezdružljiva? Določite nasprotni dogodek dogodka A .

Naloga 1.2. Imejmo poskus, pri katerem lokostrelec v tarčo izstrelji tri puščice, po eno rdečo, modro in zeleno. Da malce poenostavimo zadeve si mislimo, da ima tarča zgolj tri kroge. Notranji krog je vreden 3 točke, srednji 2 točki, zunanji 1 točko, če pa ne zadanemo niti tega največjega kroga, dobimo 0 točk. Zapišite prostor izidov za ta poskus. Nato naslednje dogodke zapišite kot podmnožice prostora izidov:

- A - drugi strel je vreden 0 točk.
- B - iz vseh treh streliv lokostrelec zbere 6 točk.
- C - v vseh treh streljih lokostrelec dobi enako mnogo točk.

Ali je kateri izmed teh dogodkov poddogodek drugega dogodka? Ali sta katera izmed dogodkov neodvisna? Določite dogodke $A \cap B$, $A \setminus C$ in $\overline{B \cup C} \cap A$.

Naloga 1.3. Navaden 74 minutni CD-ROM plošček ima 333 000 sektorjev (vsak izmed katerih vsebuje za 2048 bajtov podatkov, poleg tega pa je rezervirano še nekaj prostora za odkrivanje in odpravljanje napak). Izvajamo naslednji poskus. Vzamemo popolnoma zapisan CD-ROM plošček brez kakršnekoli napake, ga nato pustimo v škatli za 5 let in na koncu preverimo koliko sektorjev je postalo neberljivih. Zapišite ustrezen prostor izidov, nato pa določite dogodek A , da je neberljivih vsaj deset odstotkov sektorjev.

Naloga 1.4. Kovanec mečemo tako dolgo, dokler ne padeta dva grba (ne nujno zapored) ali dve cifri (ne nujno zapored). Sestavite ustrezen prostor izidov in določite dogodek, da ne padeta dve cifri.

1.3 Definicija verjetnosti

Sedaj lahko končno definiramo pojem matematične verjetnosti. Le-ta se definira kot funkcija iz prostora dogodkov nekega poskusa v množico realnih števil, ki zadošča trem aksiomom Kolmogorova (Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903–1987) je bil ruski matematik).

Definicija. Imejmo poskus s prostorom izidov S . *Verjetnost* (tudi *verjetnostna funkcija*) na prostoru izidov S je vsaka preslikava $P: \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathbb{R}$, ki zadošča naslednjim trem aksiomom:

- (i) $P(A) \geq 0$ za vse $A \subseteq S$.
- (ii) $P(S) = 1$.
- (iii) Za vsako števno neskončno družino $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ paroma disjunktnih dogodkov velja

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

ZGLED: Oglejmo si najbolj preprost zgled, to je zgled poskusa meta kovanca. V tem primeru je $S = \{0, 1\}$, kjer 0 pomeni, da je padel grb, 1 pa da je padla cifra. Imamo torej natanko štiri dogodke in sicer $\{\}$, $\{0\}$, $\{1\}$ in S . Če torej definiramo $P(\{\}) = 0$, $P(\{0\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{2}$ in $P(S) = 1$, smo s tem očitno definirali verjetnost na prostoru izidov S . ▲

Pokažimo sedaj prvi dve dokaj očitni, a vendar zelo pomembni, lastnosti verjetnosti.

Trditev 1.1. *Za vsak poskus in vsako verjetnost P na prostoru izidov S tega poskusa velja $P(\emptyset) = 0$. To pomeni, da je verjetnost, da se zgodi nemogoč dogodek, enaka 0.*

DOKAZ: Vzemimo $A_n = \emptyset$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Tedaj je $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ števno neskončna družina paroma disjunktnih dogodkov, torej po aksiomu (iii) velja $P(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset)$. Edino realno število, ki zadošča tej enakosti, je število 0, to je, $P(\emptyset) = 0$. \square

Naslednja trditev pove, da trditev iz aksioma (iii) velja tudi za končne unije paroma disjunktnih dogodkov.

Trditev 1.2. *Naj bo P verjetnost na prostoru izidov S za nek poskus in naj bodo dogodki $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{P}(S)$ paroma disjunktni. Tedaj velja $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$.*

DOKAZ: Vzamemo lahko $A_j = \emptyset$ za vse $j > n$, pa dobimo števno neskončno družino paroma disjunktnih dogodkov. Po aksiomu (iii) in zgornji trditvi je tedaj $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(\emptyset) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$, kot smo trdili. \square

Kako torej za nek poskus s prostorom izidov S definiramo verjetnost? Za vsak posamezen dogodek je treba predpisati verjetnost dogodka, to pa je treba storiti na tak način, da veljajo zgornji trije aksiomi. V primerih kot je zgornji, kjer je prostor izidov končen, lahko verjetnost vpeljemo na bolj preprost način. Ideja spominja na situacijo iz linearne algebre (spomnimo se, da lahko linearno preslikavo definiramo tako, da določimo zgolj vrednosti na baznih vektorjih). Dogovorimo se najprej, da bomo za nek izid i namesto $P(\{i\})$ pisali kar $P(i)$ in da dogodku $\{i\}$ rečemo *elementaren dogodek*. Če je torej prostor izidov za nek poskus končen, je vpeljava verjetnosti povsem preprosta. Še več, v tem primeru znamo opisati prav vse možne verjetnosti (ki pa jih je neskončno mnogo) na pripadajočem prostoru izidov. Velja namreč tale izrek.

Izrek 1.3. *Imejmo poskus s končnim prostorom izidov $S = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ za nek n . Tedaj za vsak nabor števil $0 \leq p_j \leq 1$, kjer je $1 \leq j \leq n$ in je $\sum_{j=1}^n p_j = 1$, obstaja verjetnost P na prostoru izidov S , za katero velja $P(i_j) = p_j$ za vsak $1 \leq j \leq n$. Obratno, za vsako verjetnost P na prostoru izidov S je $0 \leq P(i_j) \leq 1$ za vsak $1 \leq j \leq n$ in velja $\sum_{j=1}^n P(i_j) = 1$.*

DOKAZ: Naj za števila p_j veljajo predpostavke izreka. Za poljuben dogodek $A \subseteq S$ definirajmo $P(A) = \sum_{i_j \in A} p_j$. Da veljata pogoja prvih dveh aksiomov iz definicije verjetnosti, je očitno. Neposredno iz definicije funkcije P je moč dokazati tudi, da velja pogoj tretjega aksioma.

Obrat sledi neposredno iz aksiomov verjetnosti (bralec, ki ga skrbi neenakost $P(i_j) \leq 1$, naj si ogleda spodnji izrek 1.4). \square

Oglejmo si poseben primer zgornje situacije. Če imamo poskus, pri katerem je prostor izidov končen, recimo $|S| = n$, in so vsi izidi enako verjetni, za vsak izid i velja $P(i) = \frac{1}{n}$. V tem primeru torej za nek dogodek A velja kar $P(A) = \frac{|A|}{n}$. To pomeni, da je verjetnost dogodka A kvocient med številom “ugodnih” izidov za A (torej takih, ko se A zgodi) in številom vseh možnih izidov.

ZGLED: Pri poskusu meta poštenega kovanca, kjer je prostor izidov kar $S = \{0, 1\}$, torej verjetnost P natanko določimo že s predpisom $P(0) = P(1) = \frac{1}{2}$. Prav tako pa bi lahko verjetnost za vsak $0 \leq p \leq 1$ vpeljali s predpisom $P(0) = p$ in $P(1) = 1 - p$. Vidimo torej, da lahko že v primeru, ko ima poskus samo dva možna izida, vpeljemo neskončno mnogo različnih verjetnosti na pripadajočem prostoru dogodkov. \blacktriangle

ZGLED: Če na prostoru dogodkov za poskus meta kocke za vse $1 \leq i \leq 6$ vpeljemo verjetnost $P(i) = \frac{1}{6}$, je verjetnost dogodka A , da pade liho število pik, enaka $P(A) = \frac{1}{2}$. Velja namreč $A = \{1, 3, 5\} = \{1\} \cup \{3\} \cup \{5\}$. \blacktriangle

Izrek 1.3 pokaže kako je z verjetnostjo pri poskusu s končnim prostorom izidov. Tudi v primeru, ko je prostor izidov števno neskončna množica, stvari niso bistveno drugačne. Tudi tukaj je dovolj vpeljati verjetnosti posameznih izidov, vendar je to treba storiti tako, da je pripadajoča neskončna vsota konvergentna in je enaka 1. Oglejmo si zgled.

ZGLED: Premislimo ali je pojem “naključne izbire naravnega števila” sploh smiselen. Če je to mogoče, je treba definirati verjetnost $P(n)$ za vsak n in to tako, da bodo vse te verjetnosti enake. To pomeni, da za nek $\alpha \geq 0$ velja $P(n) = \alpha$ za vse $n \in \mathbb{N}$. A po aksiomu (iii) mora potemtakem veljati $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha = 1$, kar je seveda nemogoče, saj je ta vsota bodisi enaka 0 (ko je $\alpha = 0$) ali pa je vrsta divergentna (ko je $\alpha > 0$). Ta razmislek torej dokaže, da poskus “naključna izbira naravnega števila, pri kateri so vsa števila enako verjetna”, ne obstaja. No, če bi verjetnost vpeljali tako, da bi za vsak n

vpeljali $P(n) = \frac{1}{2^n}$, bi dobili $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$. Kot bomo videli kasneje, to verjetnost dobimo na dokaj naraven način. Če si namreč zamislimo poskus, pri katerem uravnotežen kovanec mečemo toliko časa, dokler prvič ne dobimo cifre, bo verjetnost, da smo morali kovanec vreči n -krat, ravno $\frac{1}{2^n}$. A o tem malce kasneje. ▲

Oglejmo si sedaj še nekaj osnovnih lastnosti verjetnosti.

Izrek 1.4. *Naj bo P verjetnost na prostoru izidov S nekega poskusa in naj bosta A in B poljubna dogodka. Tedaj velja naslednje:*

- (i) $0 \leq P(A) \leq 1$.
- (ii) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- (iii) $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$.
- (iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- (v) Če je $A \subseteq B$, je $P(A) \leq P(B)$.

DOKAZ: Ker sta A in \bar{A} disjunktna dogodka in je $S = A \cup \bar{A}$, po drugem aksiomu verjetnosti in trditvi 1.2 velja $1 = P(A) + P(\bar{A})$. Po prvem aksiomu verjetnosti je verjetnost poljubnega dogodka nenegativna, od koder tedaj takoj dobimo točki (i) in (ii). Točka (iii) sledi neposredno iz trditve 1.2 in dejstva, da je B disjunktna unija množic $B \setminus A$ in $A \cap B$. Ker je $A \cup B$ disjunktna unija množic A in $B \setminus A$, potem takoj dobimo še točko (iv). Tudi točka (v) sledi neposredno iz (iii) in prvega aksioma verjetnosti. □

ZGLED: Adam in Eva se že lep čas pripravljata za pisni izpit pri nekem predmetu. Vemo, da je verjetnost, da izpit opravi Adam, 0,32, verjetnost, da ga opravi Eva, je 0,63, verjetnost, da ga opravita oba, pa je 0,11. Kolikšna je tedaj verjetnost, da ga opravi vsaj eden izmed obeh? In kolikšna je verjetnost, da ga opravi natanko eden?

Označimo z A dogodek, da izpit opravi Adam, in z B dogodek, da izpit opravi Eva. Najprej nas torej zanima verjetnost $P(A \cup B)$. Ker poznamo verjetnosti $P(A)$, $P(B)$ in $P(A \cap B)$, nam izrek 1.4 pove, da je iskana verjetnost $P(A \cup B) = 0,32 + 0,63 - 0,11 = 0,84$. Zanima nas tudi verjetnost dogodka $A \Delta B$, kjer je $A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A$. Ker sta $A \setminus B$ in $B \setminus A$ disjunktna dogodka, po izreku 1.4 velja $P(A \Delta B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = 0,32 + 0,63 - 0,22 = 0,73$. ▲

ZGLED: Denimo, da hkrati vržemo 10 uravnoteženih kovancev. Kolikšna je verjetnost, da bo padla vsaj ena cifra?

Lahko si mislimo, da so kovanci označeni, da torej vemo, kateri je prvi, kateri drugi, itd. Tedaj je prostor izidov S množica nizov dolžine 10, sestavljenih iz ničel in enic. Prostor izidov je potemtakem množica z $2^{10} = 1024$ elementi. Glede na predpostavke je verjetnost vsakega izmed možnih 1024 izidov enaka. Po izreku 1.3 ima torej vsak izid verjetnost $\frac{1}{1024}$. Če z A označimo dogodek, da padejo sami grbi, je naš dogodek ravno \bar{A} . Po izreku 1.4 je torej $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024} \approx 0.999$. ▲

ZGLED: Na podoben način kot v prejšnjem zgledu zlahka izračunamo tudi verjetnosti za igri Viteza de Méré-ja. Izračunajmo verjetnost uspeha za prvo igro. Mislimo si, da hkrati vržemo štiri različne uravnotežene kocke. Vseh možnih izidov je tedaj $6^4 = 1296$. Če z A označimo dogodek, da ne pade niti ena šestica, sestoji ta dogodek iz $5^4 = 625$ izidov, torej je $P(A) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,48225$. Verjetnost, da bo padla vsaj ena šestica, je torej enaka $1 - P(A) \approx 0,51775$. ▲

ZGLED: Za konec tega razdelka si oglejmo naslednji zanimiv problem. V neki igri na televiziji voditelj igralcu pokaže troje vrat in mu pove, da ga za enimi vrati čaka nov avto, za preostalima dvema pa koza. Seveda mu ne pove, za katerimi vrati stoji avto. Igralec si izbere poljubna vrata. Ko pove svojo odločitev, voditelj odpre ena izmed preostalih dveh vrat in to tako, da vedno odpre vrata s kozo. Nato igralcu ponudi možnost, da si premisli in namesto prvotno izbranih vrat raje izbere edina druga preostala zaprta vrata. Ali naj igralec ostane pri prvotni izbiri ali naj si premisli? (Ta problem je znan pod imenom *Problem Monty Hall*.)

Večina ljudi je prepričana, da je povsem vseeno kaj igralec naredi, češ da je verjetnost, da bo zadel avto v vsakem primeru 0,5 (z argumentom, da ima na voljo pač le dvoje vrat, za enimi je avto, za drugimi pa koza). In vendar je tako razmišljanje napačno. Razlog za to je sledeč. Ko je igralec izbral svoja vrata, je bila verjetnost, da je avto za "njegovimi" vrati $1/3$. S tem, ko je voditelj odprl ena izmed preostalih vrat, mu ni dal prav nobene dodatne informacije o tem ali je za njegovimi vrati avto ali ne, saj lahko voditelj ne glede na igralčevo izbiro vedno odpre vrata s kozo. Tudi po odprtju vrat je torej verjetnost, da ima igralec izbrana prava vrata, $1/3$. Potemtakem je verjetnost, da avto ni za "njegovimi" vrati, enaka $2/3$. Ampak sedaj, ko so ena "prazna" vrata odprta, avto ni za "njegovimi" vrati natanko tedaj, ko je za edinimi drugimi preostalimi zaprtimi vrati. Torej je verjetnost, da je za drugimi zaprtimi vrati, $2/3$. To pa pomeni, da se igralcu precej bolj izplača zamenjati izbiro, saj si s tem podvoji možnosti za uspeh.

Utemeljimo vse skupaj še čisto formalno. Predno to storimo, se dogovorimo,

da v primeru, ko je igralec izbral prava vrata in ima torej voditelj na izbiro kar dvoje “praznih” vrat, voditelj ena izmed “praznih” vrat izbere povsem naključno. Označimo številko vrat, za katerimi je avto (torej 1, 2 ali 3), z a , preostali dve številki pa z b in c . Prostor izidov našega poskusa je tedaj $S = \{(a, b), (a, c), (b, c), (c, b)\}$, kjer par (i, j) predstavlja izid, pri katerem je igralec izbral vrata številka i , voditelj pa je nato odprl vrata številka j . Iz povedanega jasno sledi, da je $P((a, b)) = P((a, c))$. Prav tako je jasno, da je $P((b, c)) = P((c, b)) = 1/3$ in tako mora veljati $P((a, b)) = P((a, c)) = 1/6$. Denimo sedaj, da igralec ostane pri svoji odločitvi in označimo z A dogodek, da dobi avto. Tedaj je seveda $A = \{(a, b), (a, c)\}$ in tako je $P(A) = 1/6 + 1/6 = 1/3$. Denimo sedaj še, da igralec spremeni svojo odločitev in naj bo tokrat B dogodek, da dobi avto. Tedaj je $B = \{(b, c), (c, b)\}$ in tako je $P(B) = 1/3 + 1/3 = 2/3$. Tako vidimo, da se res izplača spremeniti izbiro.

▲

Naloga 1.5. Imejmo poskus, pri katerem vržemo štiri poštene kovance. Kolikšna je verjetnost, da pade enako mnogo grbov kot cifer? Kolikšna pa je verjetnost, da na prvem in zadnjem kovancu ne padeta dva grba niti dve cifri?

Naloga 1.6. Imejmo poskus kot v nalogi 1.1 in naj bodo tudi dogodki A , B in C kot v tej nalogi. Denimo, da sta tako kovanec kot kocka poštena. Izračunajte tedaj verjetnosti dogodkov A , B , C in $A \cap B \cap C$.

Naloga 1.7. Imejmo poskus kot v nalogi 1.2, le da tokrat lokostrelec izstrelile eno puščico. Denimo, da je verjetnost, da zadane notranji krog 0,3, verjetnost, da zadane srednji krog 0,25, verjetnost, da sploh zadane kateregakoli izmed krogov pa 0,75. Kolikšna je tedaj verjetnost, da zadane tretji krog?

Naloga 1.8. Denimo, da za dogodke A , B in C pri nekem poskusu vemo, da se ne morejo zgoditi vsi hkrati, poleg tega pa vemo, da je $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 1/3$. Ali je tedaj moč izračunati verjetnosti $P(A)$, $P(B)$ in $P(C)$?

Naloga 1.9. Tine je dolgo časa opazoval kakšnih barv krilo, srajco ter jopico za v službo obleče njegova žena. Ugotovil je, da je vedno vsaj eden izmed teh treh kosov obleke črne barve. Poleg tega je uspel ugotoviti, da je verjetnost, da obleče črne hlače, enaka 0,6, verjetnost, da obleče črno jopico in srajco, pa 0,3. Ugotovil je tudi, da je verjetnost, da obleče črno srajco, ne pa tudi črnih hlač, enaka 0,25, verjetnost, da obleče črne hlače in jopico, pa 0,1. Pokažite, da je tedaj verjetnost, da obleče vse tri kose oblačil črne barve vsaj 0,05. Ali je moč iz danih podatkov izračunati kakšna je verjetnost, da žena

obleče črno jopico, hlače in srajco pa neke druge barve? Kaj pa če Tine dodatno ugotovi še, da je verjetnost, da obleče črno jopico, 0,5. Ali lahko tedaj izračunamo kolikšna je verjetnost, da žena obleče vse tri kose oblačil črne barve?

Naloga 1.10. Izmed naravnih števil med vključno 1 in 2013 naključno izberemo eno število in to tako, da so vsa števila enako verjetna. Kolikšna je tedaj verjetnost, da smo izbrali število, ki je deljivo s 3? Kolikšna pa je verjetnost, da smo izbrali število, ki je deljivo s 3 ali 7?

1.4 Osnove kombinatorike

V tem razdelku si bomo na kratko ogledali osnovne prijeme kombinatorike, s pomočjo katerih preštevamo število “ugodnih” izidov za nek dogodek. Najpomembnejši sta pravili vsote in produkta. *Pravilo vsote* pravi, da je v primeru, ko je sta A in B disjunktni končni množici, kardinalnost množice $A \cup B$ enaka vsoti kardinalnosti množic A in B . *Pravilo produkta* pravi, da je kardinalnost kartezičnega produkta končnih množic A in B enaka produktu kardinalnosti množic A in B , to je:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| \quad \text{in} \quad |A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Kako nam ti dve pravili pomagata pri preštevanju? Pravilo vsote uporabimo, kadar preštevamo elemente množice, ki jih je moč na nek naraven način razdeliti na dva (ali več) dela. Pravilo produkta uporabljamo takrat, kadar je moč vsak element obravnavane množice opisati glede na odločitve “v dveh neodvisnih etapah”. Vsak element je torej opisan tako, da se najprej izbere reč iz nabora A , potem pa neodvisno od tega izbora še reč iz nabora B . Da ilustriramo ti dve ideji, si oglejmo konkreten zgled.

ZGLED: Denimo, da se želi Janez obleči, pri čemer bo oblekel hlače, nek zgornji del oblačila in še en “dodatek”. Na voljo ima troje hlač, za zgornji del oblačila pa se mora najprej odločiti ali bo oblekel srajco ali majico. Na voljo ima štiri srajce in dve majici. V odvisnosti od tega, ali je oblekel srajco ali majico, bo izbral še eno izmed treh kravat (ko je oblekel srajco) ali eno izmed petih kap (ko je oblekel majico). Na koliko načinov se torej lahko obleče, če privzamemo, da so izbire posameznih kosov oblačil neodvisne ena od druge?

Ker hlače izbira neodvisno od zgornjih oblačil, bomo tukaj uporabili pravilo produkta. No, pri zgornjem delu ima dve nezdružljivi možnosti: bodisi bo imel srajco, bodisi majico - tu gre torej za pravilo vsote. Izbira srajce oziroma

majice ima za posledico še “vrsto” dodatka. Tu kravato oziroma kapo zopet izbira neodvisno od izbora srajce oziroma majice. Če je torej A množica vseh hlač, B množica vseh srajc, C množica vseh majic, D množica vseh kravat in E množica vseh kap, je torej množica vseh izborov oblačenja $A \times ((B \times D) \cup (C \times E))$. Po pravilih vsote in produkta, je torej vseh možnih oblačenj $3 \cdot (4 \cdot 3 + 2 \cdot 5) = 66$. ▲

Seveda pa je včasih težko določiti že kardinalnost neke “osnovne” množice, ki je ne moremo ali ne znamo zapisati niti kot disjunktno unijo dveh smisel-
nih podmnožic, katerih kardinalnosti bi znali izračunati, niti kot kartezični produkt dveh takih množic. Včasih si lahko v takem primeru pomagamo z določenimi formulami, odvisno od tega, kakšne narave je naš problem. Mi si bomo na tem mestu ogledali le kako se lotimo raznih izborov, spoznali pa bomo tudi zelo uporabno načelo vključitev in izključitev.

Izbori:

Pri izborih gre za to, da iz množice (različnih) reči, recimo velikosti n , izbiramo nekaj izmed teh reči, recimo k . V odvisnosti od tega, ali izbrane reči vračamo ali ne in ali je vrstni red izbiranja pomemben ali ne, imamo naslednje štiri možnosti:

1. Urejeni izbori brez vračanja oziroma ponavljanja (variacije brez ponavljanja):
V tem primeru mora seveda veljati $k \leq n$. Za prvi element imamo n možnosti, za naslednjega $n - 1$, za naslednjega $n - 2$, itd., vse do k -tega, za katerega je ostalo še $n - k + 1$ možnosti. Vseh možnosti je torej $n^{[k]} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - k + 1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ (oznaki $n^{[k]}$ rečemo *padajoča potenca*).
2. Urejeni izbori s ponavljanjem (variacije s ponavljanjem):
V tem primeru imamo na vsakem mestu kar vseh n možnosti. Posamezni izbori so neodvisni drug od drugega, zato je po pravilu produkta vseh možnosti n^k .
3. Neurejeni izbori brez ponavljanja (kombinacije brez ponavljanja):
V tem primeru mora seveda zopet veljati $k \leq n$, tokrat pa je vseh možnosti $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. To formulo lahko utemeljimo takole: pri vsakem takem izboru je pomembno le katerih k reči smo izbrali. Če pri neki permutaciji vseh n reči slike prvih k števil predstavljajo k reči, ki smo jih izbrali, potem v množici vseh $n!$ permutacij vsak tak izbor štejemo $k! \cdot (n - k)!$ krat, saj je vrstni red prvih k (torej izbranih reči), prav tako pa zadnjih $n - k$ (torej neizbranih reči) povsem nepomemben.

4. Neurejeni izbori s ponavljanjem (kombinacije s ponavljanjem):

Tukaj nas v resnici zanima le, kolikokrat smo izbrali “prvo” reč, kolikokrat “drugo”, itd. Vsak tak izbor je moč na enoličen način predstaviti na naslednji način. Predstavljajmo si, da v $n + k - 1$ v vrsto zloženih predalčkov vržemo $n - 1$ belih kroglic, v vsakega največ po eno. Pri tem število praznih predalčkov do prvega zasedenega predalčka pove kolikokrat smo izbrali “prvo reč”, število praznih predalčkov med prvim in drugim zasedenim predalčkom pove kolikokrat smo izbrali “drugo reč”, itd. No, takih izborov je torej očitno $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$.

Oglejmo si še naslednjo situacijo. Denimo, da imamo v situaciji urejenih izborov s ponavljanjem, kjer torej izmed n različnih reči izbiramo k -krat, predpisano kolikokrat je treba izbrati “prvo” reč, kolikokrat “drugo”, itd. Denimo, da torej izbiramo k -krat, od tega pa je treba k_1 -krat izbrati prvo reč, k_2 -krat drugo, ..., k_n -krat n -to. Seveda mora veljati $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$. Število takih izborov lahko izračunamo takole. Najprej se je treba odločiti, kateri izbori po vrsti so izbori, ko izberemo prvo reč - za to imamo $\binom{k}{k_1}$ možnosti. Potem se je treba za $k - k_1$ preostalih izborov odločiti, katerih k_2 je tistih, pri katerih izberemo drugo reč. Nadaljujemo, pa dobimo, da je vseh izborov

$$\binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n} = \binom{k}{k_1} \binom{k - k_1}{k_2} \binom{k - k_1 - k_2}{k_3} \dots \binom{k_n}{k_n} = \frac{k!}{k_1! k_2! k_3! \dots k_n!}.$$

Čisto za konec tega uvodnega poglavja se pomudimo še pri *načelu vključitev in izključitev*. Le-to nam pove, kako lahko v primeru, ko so $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ končne množice, izračunamo kardinalnost njihove unije. Dokaza tu ne bomo navajali. Nekateri ga boste spoznali pri predmetu Diskretna matematika v 3. letniku.

Izrek 1.5. *Naj bo $n \geq 1$ naravno število in naj bodo A_1, A_2, \dots, A_n take množice, da je njihova unija končna množica. Tedaj velja*

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^n |A_i| \\ &- \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &- \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| \\ &\vdots \\ &+ (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

Oglejmo si naslednji zanimiv zgled.

ZGLED: Denimo, da na nek ples pride 7 parov. Sredi večera se odločijo, da bodo zaplesali “srčkov ples”. Gre za to, da dekletom po vrsti določimo številke od 1 do 7, nato pa tudi na 7 modrih srčkov zapišemo števila od 1 do 7, na vsakega po eno. Nato vsak fant izžreba po en moder srček. Ko je na vrsti srčkov ples, dekleta s številko i pleše s fantom z isto številko. Kolikšna je verjetnost, da niti eno deklet v srčkovem plesu ne bo plesalo s svojim fantom? Pri tem privzamemo, da so vse porazdelitve srčkov enako verjetne.

Označimo z A_i dogodek, da i -to deklet pleše s svojim fantom. Zanima nas torej dogodek \bar{A} , kjer je $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_7$. Po izreku 1.4 lahko njegovo verjetnost izračunamo tako, da izračunamo verjetnost dogodka A , nato pa dobljeno odštejemo od 1. No, vseh plesnih parov je $7^{[7]} = 7!$, saj ima prvo deklet “na izbiro” 7 možnih soplesalcev, drugo nato še 6, itd. Gre seveda za urejene izbore 7 reči iz množice velikosti 7 in to brez ponavljanja. Ker so vse porazdelitve enako verjetne, je torej treba le izračunati kardinalnost množice A , vsak elementaren dogodek ima namreč verjetnost $\frac{1}{7!}$. Po zgornjem bomo to kardinalnost izračunali, če izračunamo kardinalnosti vseh možnih presekov. Kardinalnost množice A_i je očitno $6!$, saj je v tem primeru srček enega fanta že določen, preostalih šest fantov pa lahko potem poljubno razporedimo med preostalih 6 deklet. Povsem analogno je $|A_i \cap A_j| = 5!$ za vse $1 \leq i < j \leq 7$, itd., vse do $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_7| = 1$. Če opazimo še, da je vseh možnih presekov po dveh množicah $\binom{7}{2}$ (neurejeni izbori dveh reči izmed sedmih, brez ponavljanja), vseh možnih presekov po treh množicah $\binom{7}{3}$, itd., dobimo torej

$$\begin{aligned} |A| &= 7 \cdot 6! - \binom{7}{2} 5! + \binom{7}{3} 4! - \binom{7}{4} 3! + \binom{7}{5} 2! - \binom{7}{6} 1! + 1 \\ &= 7! \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} \right) \\ &= 7! \frac{177}{280}. \end{aligned}$$

To pomeni, da je verjetnost, da nobeno deklet ne pleše s svojim fantom enaka $1 - \frac{177}{280} = \frac{103}{280} \approx 0.367857$. Seveda bi za vsak $k \geq 1$ na povsem analogen način lahko izračunali tudi verjetnost, da nobeno deklet ne pleše s svojim fantom, če je prisotnih k parov. Tako bi dobili verjetnost

$$1 - \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \right).$$

Iz analize vemo, da je $\frac{1}{e} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!}$, torej je limita te vrednosti, ko gre k čez vse meje, ravno $\frac{1}{e} \approx 0.367879$. To pomeni, da se verjetnost, da noben plesni par ne bo ustrezal dejanskemu paru, skorajda ne spremeni, pa čeprav namesto 7 parov pleše 100 000 parov. ▲

Naloga 1.11. Janez je dobil v dar pet knjig, po eno Cankarjevo, Tavčarjevo, Jančarjevo, Skubičevno in Zupanovo. Odloči se, da bo prebral vseh pet knjig,

nikakor pa se ne more odločiti v kakšnem vrstnem redu. Denimo, da se pri končni izbiri vrstnega reda odloči povsem naključno. Kolikšna je tedaj verjetnost, da je Cankarjevo in Tavčarjevo knjigo prebral pred ostalimi tremi (ne pa nujno najprej Cankarjevo in šele nato Tavčarjevo)? Kolikšna pa je verjetnost, da je Zupanovo knjigo prebral pred Cankarjevo?

Naloga 1.12. Iz kupa remi kart (52 kart) naključno izvlečemo tri karte. Izračunajte verjetnost, da smo izvlekli tri ase. Izračunajte tudi verjetnost, da so vse tri izvlečene karte iste "barve" (torej sama srca, same kare, sami piki ali sami križi). Kolikšna pa je verjetnost, da izvlečene tri karte predstavljajo malo lestvico (torej na primer as, dvojka in trojka, ali sedmica, osmica in devetica, ali desetica, fant in dama, ali celo dama, kralj, as)?

Naloga 1.13. Pet tekačev s štartnimi številkami od 1 do 5 se poda na tek na 5 kilometrov. Če privzamemo, da vsi tekači pritečejo v cilj in so verjetnosti posameznih možnih vrstnih redov v cilju enake, kolikšna je tedaj verjetnost, da je tekač številka 1 tretji, tekač številka 2 pa peti?

Naloga 1.14. Pri igri LOTO je treba uganiti katerih 7 izmed možnih 39 števil bo izžrebanih. Vsak nabor izbranih sedmih števil imenujemo kombinacija. Izračunajte koliko možnih kombinacij obstaja. Denimo, da je 5 000 ljudi vplačalo vsak po eno kombinacijo, pri čemer predpostavljamo, da vsak svojo kombinacijo izbere povsem naključno. Kolikšna je tedaj verjetnost, da sta vsaj dva vplačala povsem isto kombinacijo? Kaj pa, če je bilo vplačanih 10 000 listkov s po eno kombinacijo?

(Nasvet: Pri izračunih konkretnih števil boste potrebovali računalnik. Lahko na primer uporabite kar programski jezik C, Pascal ali Python. Ker gre za izjemno velika števila, svetujem, da dobro premislite, kako boste zadevo dejansko izračunali.)

Naloga 1.15. V posodici imamo pet kroglic, po eno rdečo, modro, belo, rumeno in zeleno. Štirikrat izvlečemo eno kroglico iz posodice, si zabeležimo njeno barvo, nato pa jo vrnemo nazaj v posodico. Privzemimo, da kroglice izbiramo povsem naključno. Kolikšna je tedaj verjetnost, da nobene kroglice ne bomo izvlekli dvakrat? Kolikšna pa je verjetnost, da bodo izvlečene kroglice treh različnih barv, od tega pa bomo dvakrat izvlekli belo kroglico?

Naloga 1.16. Imejmo poskus kot v nalogi 1.10. Kolikšna je tedaj verjetnost, da je izbrano število deljivo z vsaj enim izmed števil 3, 5 in 7?

Naloga 1.17. Imejmo poskus kot v nalogi 1.4. Denimo, da je kovanec nepošten, pri čemer je verjetnost grba $1/3$, verjetnost cifre pa $2/3$. Kolikšna je tedaj verjetnost, da kovanec vržemo le dvakrat? Kolikšna pa je verjetnost, da dobimo dve cifri?

Poglavje 2

Pogojna verjetnost in neodvisnost dogodkov

V tem poglavju se bomo ukvarjali z vprašanjem, kaj nam razkritje dejstva, da se je nek dogodek zgodil, pove o verjetnosti drugih dogodkov za isti poskus.

2.1 Pogojna verjetnost

Denimo, da imamo na nekem prostoru izidov S definirano verjetnost P in naj bosta $A, B \subseteq S$ poljubna dogodka. Vsak ima seveda svojo verjetnost, torej $P(A)$ in $P(B)$. V tem razdelku nas bosta zanimali naslednji dve vprašanji. Ali se verjetnost, da se je zgodil dogodek A , kaj “spremeni”, če izvemo, da se je zgodil dogodek B ? Kaj pomeni to, da se s tem ta verjetnost ne spremeni?

Glede na to, da so dogodki podmnožice prostora izidov, lahko o teh vprašanjih povemo naslednje. Če vemo, da se je zgodil dogodek B , je moral biti izid poskusa nek izid iz B . Torej se je zgodil tudi dogodek A natanko tedaj, ko se je zgodil dogodek $A \cap B$. Če bi torej imeli opravka s poskusom s končnim prostorom izidov, pri katerem bi bili vsi izidi enako verjetni, bi bila verjetnost, da se zgodi dogodek A pri pogoju, da se je zgodil dogodek B , enaka $\frac{|A \cap B|}{|B|}$. Definicija pogojne verjetnosti za splošne poskuse sledi tej ideji.

Definicija. Naj bo S prostor izidov za nek poskus, naj bo P verjetnost na S in naj bosta $A, B \subseteq S$ taka dogodka, da je $P(B) > 0$. Tedaj *pogojno verjetnost* dogodka A pri pogoju, da se je zgodil dogodek B (ali krajše, *pogojno verjetnost dogodka A pri pogoju B*) označimo s $P(A | B)$ in jo definiramo kot

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Opazimo, da je pogojna verjetnost $P(B | B) = 1$ in $P(A | S) = P(A)$. To je skladno z našimi pričakovanji. Če namreč že vemo, da se je dogodek B zgodil, potem je verjetnost, da se je zgodil dogodek B , pač 1. Podobno, če vemo, da se je zgodil dogodek S , v resnici nismo izvedeli nič novega.

Pokažimo najprej, da je zgoraj definirana pogojna verjetnost zares verjetnost na prostoru izidov S .

Izrek 2.1. *Naj bo S prostor izidov za nek poskus, P verjetnost na S in $B \subseteq S$ tak dogodek, da je $P(B) > 0$. Tedaj je preslikava $Q: \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathbb{R}$, podana s predpisom $Q(A) = P(A | B)$, verjetnost na prostoru izidov S .*

DOKAZ: Ker je $P(B) > 0$ in je $P(C) \geq 0$ za vse $C \subseteq S$, je seveda jasno, da prvi aksiom verjetnosti za Q velja. Da je $Q(S) = 1$, sledi neposredno iz $S \cap B = B$. Pokažimo še veljavnost tretjega aksioma. Naj bodo v ta namen A_1, A_2, A_3, \dots paroma disjunktni dogodki. Tedaj so seveda paroma disjunktni tudi dogodki $A_1 \cap B, A_2 \cap B, A_3 \cap B, \dots$. Ker je P verjetnost na S , torej po distributivnosti velja

$$Q\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B)\right)}{P(B)} =$$

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} Q(A_n).$$

□

Oglejmo si za začetek naslednja dva zgleda.

ZGLED: Imejmo poskus meta poštene kocke. Izračunajmo verjetnost, da smo vrgli vsaj 4, če vemo, da smo vrgli sodo mnogo pik.

Naj bo A dogodek, da smo vrgli vsaj 4 in B dogodek, da smo vrgli sodo mnogo pik. Tedaj je $A \cap B$ dogodek, da smo vrgli 4 ali 6 pik. Očitno torej velja, da je $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ in $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ in tako je pogojna verjetnost $P(A | B)$ enaka $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$. Verjetnost samega dogodka A je seveda $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$. S tem, da smo izvedeli, da je padlo sodo mnogo pik, se je torej verjetnost, da smo vrgli vsaj štiri pike, povečala. Izračunajmo še pogojno verjetnost dogodka B pri pogoju A . Po zgornjem je $P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$. Vidimo, da je torej v tem primeru $P(A | B) = P(B | A)$. ▲

ZGLED: Denimo, da iz kupa kart za poker (torej $52 = 13 \cdot 4$ kart) naključno izberemo dve karti. Nato izmed preostalih kart izberemo še dve karti in jih

damo soigralcu. Le-ta nam pove, da je dobil dve dami. Kolikšna je toedaj verjetnost, da imamo tudi mi dve dami? Kolikšna pa je verjetnost, da imamo mi srčevo damo?

Označimo z A dogodek, da imamo mi dve dami, z B dogodek, da ima soigralec dve dami in s C dogodek, da imamo mi srčevo damo. Zanimata nas seveda verjetnosti $P(A | B)$ ter $P(C | B)$. V vsakem primeru bomo morali izračunati verjetnost $P(B)$. Tu nas torej sploh ne zanima kateri dve karti smo dobili mi, torej je pomembno le kateri dve karti izmed vseh štiriinpetdesetih je dobil soigralec. Izborov, v katerih dobi on dve dami, je $\binom{4}{2} = 6$, vseh izborov dveh kart pa je seveda $\binom{54}{2} = 1431$. Potemtakem je $P(B) = \frac{6}{1431} = \frac{2}{477}$. Izidi, ki sestavljajo dogodek $A \cap B$ so vsi tisti, pri katerih nam in soigralcu razdelimo ravno vse štiri dame. Tu se je torej potrebno odločiti le kateri dve dami dobimo mi, kar seveda zopet storimo na $\binom{4}{2} = 6$ načinov. Vseh izborov za oba igralca je $\binom{54}{2} \cdot \binom{52}{2} = 1897506$, saj moramo najprej izmed vseh 54 kar izbrati dve za nas, potem pa izmed preostalih 52 še dve za soigralca. V ozadju je pravilo produkta. Tako je $P(A \cap B) = \frac{6}{1897506} = \frac{1}{316251}$, in zato

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{316251}}{\frac{2}{477}} = \frac{1}{1326}.$$

Oglejmo si sedaj kateri izidi sestavljajo dogodek $B \cap C$. Mi moramo dobiti srčevo damo in še eno karto, soigralec pa dve dami. To se lahko zgodi na dva bistveno različna načina. Lahko, da je tudi naša druga krata dama, lahko pa da ni. Izidi, ki ustrezajo prvi varianti, so trije (glede na to, katero od preostalih treh dam smo dobili mi). Izidov, ki ustrezajo drugi varianti, je $\binom{50}{1} \cdot \binom{3}{2} = 150$, saj moramo najprej sebi izbrati eno izmed petdesetih kart, ki niso dama, potem pa soigralcu izbrati dve izmed treh preostalih dam. Tako je ugodnih izidov za dogodek $B \cap C$ natanko $3 + 150 = 153$ in tako je $P(B \cap C) = \frac{153}{1897506} = \frac{1}{12402}$. Potemtakem je

$$P(C | B) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{12402}}{\frac{2}{477}} = \frac{1}{52}.$$

▲

Naslednja trditev je lahko zelo uporabna, ko imamo opraviti z več dogodki.

Trditev 2.2. Naj bo S prostor izidov za nek poskus in naj bo P verjetnost na S . Denimo, da so A_1, A_2, \dots, A_n taki dogodki, da je $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$. Tedaj velja

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) =$$

$$P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

DOKAZ: Ker je $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \subseteq A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_i$ za vsak $1 \leq i \leq n-1$, po izreku 1.4 za vsak $i \geq 1$ velja $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_i) > 0$. Tedaj so vse navedene pogojne verjetnosti zares definirane. No, po definiciji pogojne verjetnosti dobimo

$$\begin{aligned} P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) &= \\ P(A_1) \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})} &= \\ P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n), & \end{aligned}$$

kot smo trdili. □

Oglejmo si zgled uporabe.

ZGLED: Janez je kupil vrečko bonbonov, v kateri je b enakih belih in c enakih črnih bonbonov. Potem v naslednjih štirih dneh vsak dan iz vreče naključno izbere en bonbon in ga poje. Kakšna je verjetnost, da je prva dva dni pojedel bel, zadnja dva dni pa črn bonbon?

Glede na to, da je moč iz teksta očitno razbrati, da so vsa možna zaporedja izbiranja bonbonov enako verjetna, je ena pot do rešitve pač ta, da preštejemo vse "ugodne možnosti" in sploh vse možnosti. Lahko si namreč domišljamo, da Janez poje prav vse bonbone (torej vse skupaj traja $b + c$ dni). Tedaj je vsak možen vrstni red izbiranja natanko določen s tem, da povemo katere dneve je izbral bel bonbon. Teh možnosti je potemtakem $\binom{b+c}{b}$. In kateri izbori so za nas ugodni? No, to so tisti, pri katerih je prve štiri dni bonbone izbral tako, kot je predpisano, preostalih $b - 2$ belih in $c - 2$ črnih pa potem v preostalih $b + c - 4$ dneh poje v poljubnem vrstnem redu. Takih izborov je torej po podobnem premisleku kot zgoraj $\binom{b+c-4}{b-2}$. Potemtakem je verjetnost, da prva dva dni poje bela, druga dva dni pa črna bonbona, enaka

$$\frac{\binom{b+c-4}{b-2}}{\binom{b+c}{b}} = \frac{\frac{(b+c-4)!}{(b-2)!(c-2)!}}{\frac{(b+c)!}{b!c!}} = \frac{b(b-1)c(c-1)}{(b+c)(b+c-1)(b+c-2)(b+c-3)}.$$

Enak rezultat lahko dobimo tudi po drugi poti, s pomočjo zgornje trditve 2.2. Označimo namreč z A_1 dogodek, da prvi dan poje bel bonbon, z A_2 dogodek, da drugi dan poje bel bonbon, z A_3 dogodek, da tretji dan poje črn bonbon

in z A_4 dogodek, da četrti dan poje črn bonbon. Tedaj nas seveda zanima verjetnost dogodka $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$. No, po zgornji trditvi lahko to verjetnost izračunamo takole:

$$P(A) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2)P(A_4 | A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Glede na to, da ima Janez prvi dan na izbiro $b + c$ bonbonov, od tega pa je belih le b , je $P(A_1) = \frac{b}{b+c}$. Ko računamo verjetnost $P(A_2 | A_1)$ je treba upoštevati, da ima sedaj Janez na voljo le še $b + c - 1$ bonbonov, od katerih je $b - 1$ belih. Tako je $P(A_2 | A_1) = \frac{b-1}{b+c-1}$. Podobno je potem še $P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{c}{b+c-2}$ in $P(A_4 | A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{c-1}{b+c-3}$. Seveda torej tudi po tej poti dobimo

$$P(A) = \frac{b(b-1)c(c-1)}{(b+c)(b+c-1)(b+c-2)(b+c-3)}.$$

Za konec omenimo tole varianto zgornjega zgleda. Denimo, da je črnih bonbonov enako mnogo kot belih. Kakšna je tedaj verjetnost, da bo tudi po štirih pretečenih dneh belih bonbonov enako mnogo kot črnih? Pri kateri vrednosti se ustali verjetnost tega dogodka, če število belih (in zato črnih) bonbonov pošljemo čez vse meje? Ali je to presenetljivo? ▲

Naloga 2.1. Denimo, da iz kupa remi kart (52 kart) povsem naključno izberemo dve karti, najprej eno, nato pa še eno. Naj bo A dogodek, da je prva karta srce, B pa dogodek, da je druga karta srce. Izračunajte verjetnosti $P(A)$, $P(B|A)$ in $P(B|\bar{A})$. Kaj pa verjetnost $P(B)$, ali lahko izračunate to verjetnost direktno? (V razdelku 2.3 bomo dokazali izrek, ki precej poenostavi izračun te verjetnosti.)

Naloga 2.2. V posodici imamo 5 belih, 4 rdeče in 3 modre kroglice. Naključno izberemo eno in glede na njeno barvo storimo sledeče. Če je bela, jo vrnemo v posodico. V ostalih dveh primerih je ne vrnemo v posodico, vendar v primeru, ko je kroglica rdeča, v posodico namesto nje damo dve novi modri kroglici. Nato ponovno izvlečemo eno kroglico. Glede na barvo prve izvlečene kroglice izračunajte vse tri pogojne verjetnosti, da je druga izvlečena kroglica modra (torej verjetnost, da je druga modra, če je prva bela, itd.)

Naloga 2.3. Janko in Metka se učita za izpit. Če je verjetnost, da izpit opravi Janko, $1/3$, verjetnost, da ga opravi Metka, če ga Janko ne, pa $1/4$, kolikšna je tedaj verjetnost, da ga opravi vsaj eden izmed obeh študentov? Kaj pa, če je verjetnost, da ga opravi vsaj eden, $2/3$, verjetnost, da ga ne opravi Janko, če ga ne opravi niti Metka, pa je $1/2$. Kolikšna je tedaj verjetnost, da ga opravi Metka?

Naloga 2.4. Za osmino finala svetovnega prvenstva v nogometu se je kvalificiralo 16 ekip, sedaj pa je potrebno opraviti žreb, ki bo določil 8 parov. Pri tem se tekme igrajo na osmih različnih stadionih, pri vsakem paru pa je potrebno določiti tudi katero moštvo na tekmi igra vlogo domačina (in bo zato njeno ime zapisano pred imenom nasprotnika). Denimo, da je med 16 ekipami 8 ekip, ki nekako sodijo v višji rang, osem pa takšnih, ki sodijo v nižji rang. Če privzamemo, da je žreb nedelegiran (torej je vsako moštvo lahko v paru z vsakim drugim moštvom) in je žreb opravljen povsem naključno, kolikšna je tedaj verjetnost, da bo v vsakem paru igralo moštvo višjega ranga proti moštvu nižjega ranga? Kaj pa, če imamo samo 8 moštev (po 4 višjega in nižjega ranga) in je torej treba določiti pare za štiri četrtfinalne pare, ki bodo odigrane na štirih izbranih stadionih?

(Nasvet: nalogo lahko rešite zgolj z uporabo kombinatoričnih prijemov, lahko pa si pomagata s trditvijo 2.2.)

Naloga 2.5. Trije prašički si vsak zase zgradijo hišico, najmlajši slamnato, srednji leseno, najstarejši pa zidano. Denimo, da je verjetnost, da lahko volk podre zidano hišico, če lahko podre ostali dve, enaka $1/4$, da je verjetnost, da lahko podre leseno hišico, če lahko podre slamnato, enaka $1/3$, in da je verjetnost, da lahko podre slamnato hišico, enaka $1/2$. Kolikšna je tedaj verjetnost, da lahko podre hišici mlajših dveh prašičkov, zidano hišico najstarejšega pa ne?

2.2 Neodvisnost dogodkov

Kot smo videli v primerih iz prejšnjega razdelka, se včasih verjetnost nekega dogodka "spremeni", če izvemo, da se je zgodil nek drug dogodek. V posebej lepih primerih pa temu ni tako. Naslednja definicija sicer na prvi pogled nima prav nič opraviti s pravkar povedanim, a kot bomo kmalu videli, videz vara.

Definicija. Naj bo S prostor dogodkov za nek poskus in P verjetnost na S . Pravimo, da sta dogodka $A, B \subseteq S$ *nedovisna*, če velja $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Najprej opazimo, da je v primeru, ko je $A = S$ ali $A = \emptyset$, vsak dogodek B neodvisen od A . Res, če je $A = S$, je $A \cap B = B$ in tako je $P(A \cap B) = P(B) = 1 \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$. Podobno za $A = \emptyset$ dobimo $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 = 0 \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$. Zanimive so torej le situacije, ko nobeden izmed dogodkov A in B ni niti gotov niti nemogoč dogodek.

Denimo sedaj, da velja $P(A), P(B) > 0$. Tedaj sta dobro definirani pogojni verjetnosti $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ in $P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Opazimo, da sta v tem primeru dogodka A in B neodvisna natanko tedaj, ko je $P(A) = P(A | B)$ in $P(B) = P(B | A)$, to je, ko nam podatek o tem, ali se je zgodil eden od obeh dogodkov, ne pove čisto nič o tem, ali se je zgodil drugi. Opozorimo na možno zamenjavo pojmov. Pojma disjunktnosti (oziroma nezdržljivosti) in neodvisnosti dogodkov imata povsem različen pomen. Pravzaprav je tako, da dogodka, ki sta disjunktna, nista nikoli neodvisna, razen v trivialnem primeru, ko je eden izmed njiju nemogoč dogodek. Če sta namreč dogodka A in B disjunktna in vemo, da se je zgodil dogodek A , potem se dogodek B zagotovo ni mogel zgoditi. Oglejmo si konkreten zgled.

ZGLED: V zgornjem zgledu, kjer smo obravnavali met poštene kocke, sta bila dogodka A (število pik, ki pade, je vsaj 4) in B (pade sodo mnogo pik) odvisna, saj $P(A | B) \neq P(A)$. Če pa s C označimo dogodek, da je število pik, ki pade, največ 2, sta dogodka B in C neodvisna. Velja namreč $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{3}$ in $P(B \cap C) = P(2) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$. Po drugi strani sta A in C disjunktna dogodka, to je, $A \cap C = \emptyset$. Tako je $P(A \cap C) = 0 \neq P(A)P(C)$.

▲

Zgoraj smo omenili, da sta dogodka A in B , za katera je $P(A), P(B) > 0$, neodvisna natanko tedaj, ko nam to, ali se je eden zgodil, ne pove prav nič o tem, ali se je zgodil drugi. Potemtakem morata biti dogodka A in B neodvisna tedaj in le tedaj, ko sta neodvisna tudi dogodka A in \bar{B} . Naslednja trditve pokaže prav to.

Trditve 2.3. *Naj bo S prostor izidov za nek poskus, naj bo P verjetnost na S in naj bosta $A, B \subseteq S$ taka dogodka, da je $0 < P(A), P(B) < 1$. Tedaj so ekvivalentne naslednje štiri trditve:*

- (i) A in B sta neodvisna dogodka.
- (ii) A in \bar{B} sta neodvisna dogodka.
- (iii) \bar{A} in B sta neodvisna dogodka.
- (iv) \bar{A} in \bar{B} sta neodvisna dogodka.

DOKAZ: Pokažimo najprej, da iz neodvisnosti dogodkov A in B sledi neodvisnost dogodkov A in \bar{B} . Če sta A in B neodvisna, velja $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Tedaj po izreku 1.4 velja

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B}),$$

od koder sledi, da sta dogodka A in \bar{B} neodvisna. Če v tem premisleku dogodek B zamenjamo z nasprotnim dogodkom \bar{B} , dobimo še drugo implikacijo med (i) in (ii). Zaradi simetričnosti relacije neodvisnosti dogodkov takoj sledi, da je (i) ekvivalentno (iii). Z zamenjavo \bar{A} namesto A v prvem premisleku dobimo še, da je (iii) ekvivalentno (iv). \square

Kadar imamo opravka z več kot dvema dogodkoma, lahko govorimo o dveh vrstah neodvisnosti med dogodki.

Definicija. Naj bo S prostor izidov za nek poskus, naj bo P verjetnost na S in naj bo \mathcal{D} družina dogodkov $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P}(S)$. Pravimo, da so dogodki iz družine \mathcal{D} *paroma neodvisni*, če je vsak par dogodkov iz \mathcal{D} neodvisen. Dogodki družine \mathcal{D} so *neodvisni*, če za vsako končno podmnožico $I \subset \mathbb{N}$ množice indeksov velja, da je $P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$.

Seveda je vsaka neodvisna družina dogodkov paroma neodvisna družina dogodkov. Kot pokaže naslednji zgled pa obrat v splošnem ne velja.

ZGLED: Imejmo, na primer, poskus meta dveh poštenih kovancev, majhnega in velikega. Dogodek A , da na majhnem kovancu pade cifra, ima verjetnost $\frac{1}{2}$. Dogodek B , da na večjem kovancu pade grb, ima prav tako verjetnost $\frac{1}{2}$. Tudi dogodek C , da pade ena cifra in en grb, ima verjetnost $\frac{1}{2}$. Hitro se prepričamo, da so ti trije dogodki paroma neodvisni. A $P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) = \frac{1}{4} \neq (\frac{1}{2})^3$, torej dogodki niso neodvisni. \blacktriangle

Oglejmo si sedaj še dva zgleda, o katerih smo nekaj že govorili.

ZGLED: Spomnimo se problema viteza de Méré-ja. Ker je število pik pri metu kocke za vsak posamezen met povsem neodvisno od števila pik pri kakem drugem metu, je verjetnost, da v štirih metih ne dobimo nobene šestice enaka $(\frac{5}{6})^4$. Torej je verjetnost, da dobimo vsaj eno šestico, enaka $1 - (\frac{5}{6})^4 = \frac{671}{1296}$, kar je seveda več kot 0.5. Podobno je verjetnost, da v 24 metih dveh kock dobimo vsaj eno dvojno šestico, enaka $1 - (\frac{35}{36})^{24} = \frac{11\,033\,126\,465\,283\,976\,852\,912\,127\,963\,392\,284\,191}{22\,452\,257\,707\,354\,557\,240\,087\,211\,123\,792\,674\,816}$, kar je manj kot 0.5. \blacktriangle

ZGLED: Spomnimo se, da smo pokazali, da poskus naključne izbire naravnega števila, pri kateri bi bila vsa števila enako verjetna, ne obstaja. Takrat smo obljubili, da si bomo kasneje ogledali nek poskus, pri katerem bo prostor izidov vendarle \mathbb{N} . Imejmo pošten kovanec. Naš poskus izgleda takole. Kovanec mečemo toliko časa, dokler prvič ne dobimo cifre. Kaj naj bo tokrat

prostor izidov? Glede na to, da nas zanima kolikokrat je treba vreči kovanec, da pade cifra, se zdi, da je primerna izbira $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, kjer izid n pomeni, da je prva cifra padla pri n -tem metu, izid ∞ pa, da cifra nikoli ne pade. Poglejmo, če izid ∞ zares potrebujemo. Izračunajmo verjetnost elementarnega dogodka ∞ . Posamezni meti so očitno neodvisni, torej je $P(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, kjer je n elementarni dogodek, da je prva cifra padla pri n -tem metu. Ker je $\{\infty\} = \overline{\mathbb{N}}$ in je \mathbb{N} števna disjunktna unija elementarnih dogodkov n , je torej

$$P(\infty) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P(n) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 - \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 \right) = 1 - 1 = 0.$$

To pomeni, da je verjetnost, da nikoli ne vržemo cifre, enaka 0. Povedano drugače, slej ko prej bomo zagotovo vrgli cifro. To pomeni, da bi lahko za prostor izidov vzeli kar $S = \mathbb{N}$. \blacktriangle

Naloga 2.6. Denimo, da imate dve enaki telesi, vsako izmed katerih ima tri ne nujno ravne ploskve (torej lica), ki so oštevilčene s števili od 1 do 3. Pri tem je za vsako izmed treh ploskev verjetnost, da telo pri metu konča na tej ploskvi, enaka $1/3$. Gre torej za pošteni telesi. Kolikšno je najmanjše naravno število n , da bo verjetnost, da v n zaporednih metih obeh teles dobite vsaj eno dvojno enico, večja od $1/2$?

Naloga 2.7. Privzemimo, da je pri žrebanju LOTA posamezno žrebanje povsem naključno in neodvisno od predhodnih žrebanj. Denimo, da si mi izberemo neko kombinacijo sedmih števil, ki jo nato vplačamo za naslednjih 10 000 kol (ob predpostavki, da sta vsak teden dve žrebanji, to zadošča za nekaj več kot naslednjih 96 let). Kolikšna je verjetnost, da bomo v vsem tem času vsaj enkrat zadeli sedmico?

(Nasvet: Tudi tokrat si boste morali za izračun verjetnosti pomagati z računalniškim programom.)

Naloga 2.8. Imejmo met dveh neuravnoteženih kovancev, zlatega in srebrnega. Pri zlatem je verjetnost cifre enaka $1/3$, pri srebrnem pa $3/5$. Poiščite vse dogodke, ki so neodvisni z dogodkom, da na zlatem kovancu pade cifra.

Naloga 2.9. Tine in Tone sta alpinistična plezalca. Vsak od njiju se odloči poskusiti preplezati severno triglavsko steno. Denimo, da je uspešnost enega neodvisna od uspešnosti drugega. Denimo dodatno še, da je verjetnost, da bo uspelo Tonetu, če bo uspelo vsaj enemu, enaka $2/3$, verjetnost, da bo uspelo Tinetu, če bo uspelo tudi Tonetu, pa $1/5$. Kolikšna je tedaj verjetnost, da bo steno uspelo preplezati Tonetu? Kaj je bolj verjetno, da bo uspelo Tinetu ali Tonetu? Kolikšna pa je verjetnost, da bo uspelo vsaj enemu?

Naloga 2.10. Imamo tetraeder, na katerega štiri ploskve zapišemo števila od 1 do 4. Ko tetraeder vržemo na mizo, konča na eni izmed svojih ploskev. Denimo, da je verjetnost, da konča na ploskvi 1, enaka $1/3$, da konča na ploskvi 2, enaka $1/4$ in da konča na ploskvi 3, enaka $1/5$. Kolikšna je tedaj verjetnost, da konča na ploskvi 4? Denimo sedaj, da štirikrat zapored vržemo ta tetraeder. Kolikšna je verjetnost, da na vsako izmed štirih ploskev pade natanko enkrat?

2.3 Izrek o popolni verjetnosti in Bayesova formula

Spomnimo se, da je particija množice A taka družina njenih podmnožic $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, da za poljubna $\lambda \neq \mu$ velja $A_\lambda \cap A_\mu = \emptyset$ in $\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = A$. Naslednji izrek, ki se imenuje izrek o popolni verjetnosti, pove, da lahko v primeru, ko imamo števno particijo prostora izidov, verjetnost poljubnega dogodka izračunamo s pomočjo določenih pogojnih verjetnosti.

Izrek 2.4 (O popolni verjetnosti). *Naj bo S prostor izidov za nek poskus in naj bo P verjetnost na S . Naj bo $\{A_n : n \in I\}$ taka števna particija prostora izidov S , da za vsak $n \in I$ velja $P(A_n) > 0$. Tedaj za poljuben dogodek $B \subseteq S$ velja*

$$P(B) = \sum_{n \in I} P(A_n)P(B | A_n).$$

DOKAZ: Ker je $\{A_n : n \in I\}$ particija množice S , je seveda $\{B \cap A_n : n \in I\}$ particija množice B , kar pomeni, da je dogodek B disjunktna unija dogodkov $B \cap A_n$, kjer je $n \in I$. Po tretjem aksiomu verjetnosti (če je I števno neskončna množica) ali po trditvi 1.2 (če je I končna množica) je torej

$$P(B) = P\left(\bigcup_{n \in I} (B \cap A_n)\right) = \sum_{n \in I} P(B \cap A_n) = \sum_{n \in I} P(A_n)P(B | A_n).$$

□

Oglejmo si nekaj zgledov uporabe.

ZGLED: V neki tovarni imajo dva stroja, ki sta nujno potrebna, da proizvodnja teče. Takoj, ko se pokvari katerikoli izmed njiju, se proizvodnja ustavi. Največkrat se to zgodi zaradi slabe napetosti v dotrajanih elektroinstalacijah.

V nekem trenutku se proizvodnja zopet ustavi. Denimo, da vemo, da se je pokvaril samo eden izmed strojev (torej ne oba) in da je verjetnost, da se je pokvaril prvi $2/5$, verjetnost, da se je pokvaril drugi pa $3/5$. Poleg tega vemo, da je v primeru, da se je pokvaril prvi, verjetnost, da je bila vzrok okvare prešibka napetost, enaka $1/5$, v primeru, da se je pokvaril drugi, pa je verjetnost, da je bila vzrok okvare prešibka napetost, enaka $3/5$. Kolikšna je tedaj verjetnost, da je bila vzrok okvare prešibka napetost?

Če z A_1 označimo dogodek, da se je pokvaril prvi stroj, z A_2 pa dogodek, da se je pokvaril drugi stroj, je $\{A_1, A_2\}$ particija prostora izidov. Če označimo z B dogodek, da je bila vzrok okvare prešibka napetost, dobimo po zgornjem izreku 2.4 $P(B) = P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{11}{25}$. ▲

ZGLED: Imamo dve žari. V prvi imamo tri bele in pet črnih kroglic, v drugi pa tri bele in tri črne kroglice. Najprej iz prve žare izvlečemo poljubno kroglico in jo damo v drugo žaro. Nato iz druge žare izvlečemo poljubno kroglico. Kolikšna je verjetnost, da je ta kroglica črna?

Označimo z A_b dogodek, da smo iz prve žare izvlekli belo kroglico, z A_c pa dogodek, da smo iz prve žare izvlekli črno kroglico. Tedaj je $\{A_b, A_c\}$ očitno particija prostora izidov in velja $P(A_b) = \frac{3}{8}$ in $P(A_c) = \frac{5}{8}$. Če torej z B označimo dogodek, da iz druge žare izvlečemo črno kroglico, je $P(B | A_b) = \frac{3}{7}$ in $P(B | A_c) = \frac{4}{7}$. po izreku 2.4 je torej $P(B) = P(A_b)P(B | A_b) + P(A_c)P(B | A_c) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{29}{56}$. ▲

ZGLED: Vrnimo se k problemu Monty Hall in še s pomočjo popolne verjetnosti dokažimo, da je z uporabo strategije menjave vrat verjetnost uspeha enaka $2/3$. Spomnimo se, da smo številko vrat, za katerimi je avto, označili z a . Označimo z A dogodek, da smo na začetku izbrali vrata a , z B dogodek, da smo izbrali vrata b , in s C dogodek, da smo izbrali vrata c . Tedaj je $\{A, B, C\}$ particija prostora izidov in velja $P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$. Označimo z Z dogodek, da na koncu dobimo avto. Po izreku o popolni verjetnosti je $P(Z) = P(A)P(Z | A) + P(B)P(Z | B) + P(C)P(Z | C)$. Glede na strategijo menjave vrat v primeru, da prvič izberemo prava vrata (torej a), po zamenjavi zagotovo izberemo napačna vrata. Torej je $P(Z | A) = 0$. Po drugi strani v primeru, da izberemo bodisi vrata b bodisi c , po zamenjavi zagotovo izberemo prava vrata (torej a) in tako je $P(Z | B) = P(Z | C) = 1$. Sledi $P(Z) = 1/3 + 1/3 = 2/3$, kot smo izračunali že v prvem poglavju.

Sedaj pa si oglejmo še malce bolj zapleteno situacijo. Denimo, da imamo tokrat na voljo četvero vrat, zopet pa je nagrada le za enimi vrati. Tokrat nam voditelj oddaje dvakrat odpre po ena izmed preostalih praznih vrat in nam nato ponudi možnost menjave vrat. Po naši prvi izbiri odpre ena "prazna" vrata, nato nam da možnost menjave vrat, nakar odpre še ena

“prazna” vrata in nam še v drugo ponudi menjavo vrat. Denimo, da se odločimo, da prvič vrata menjamo, drugič pa ostanemo pri svoji izbiri. Kolikšna je tedaj verjetnost, da dobimo avto? Ali je večja kot če bi kar izbrali ena vrata in ves čas ostali pri svoji izbiri?

Zopet naj bo a številka vrat z avtomobilom, preostala vrata pa naj imajo številke b , c in d . Naj imajo dogodki A , B , C in D podoben pomen kot zgoraj (začetna izbira vrat) in naj bo Z dogodek, da na koncu dobimo avto. Očitno je zopet $P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = 1/4$. Prav tako brž ugotovimo, da je $P(Z | A) = 0$, saj v tem primeru pri prvi možni menjavi zamenjamo “prava” vrata za ena izmed “praznih”, ki jih potem obdržimo do konca. No, če na začetku izberemo napačna vrata, nam voditelj odpre ena izmed preostalih dveh “praznih” vrat, sedaj pa mi zaradi naše strategije moramo menjati vrata. Na voljo je dvoje vrat, od katerih so ena prava, druga pa ne. Ker bomo po tej menjavi obdržali izbrana vrata, je $P(Z | B) = P(Z | C) = P(Z | D) = 1/2$. Po izreku o popolni verjetnosti je tako $P(Z) = 3 \cdot 1/4 \cdot 1/2 = 3/8$. To je seveda več kot $1/4$, kar je očitno verjetnost uspeha, če enostavno izberemo ena izmed štirih ponujenih vrat, in nato ne spreminjamo odločitve. ▲

Oglejmo si sedaj še Bayesovo formulo, ki je neposredna posledica izreka 2.4.

Posledica 2.5 (Bayesova formula). *Naj bo S prostor izidov za nek poskus in naj bo P verjetnost na S . Denimo, da je $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ taka particija prostora izidov S , da za vsak $1 \leq j \leq k$ velja $P(A_j) > 0$. Tedaj za poljuben dogodek $B \subseteq S$, za katerega je $P(B) > 0$, in za vsak $1 \leq j \leq k$ velja*

$$P(A_j | B) = \frac{P(A_j)P(B | A_j)}{\sum_{i=1}^k (P(A_i)P(B | A_i))}.$$

DOKAZ: Po izreku 2.4 o popolni verjetnosti velja $P(B) = \sum_{i=1}^k (P(A_i)P(B | A_i))$. Ker je po definiciji pogojne verjetnosti $P(B | A_j) = \frac{P(B \cap A_j)}{P(A_j)}$, se Bayesova formula v resnici glasi

$$P(A_j | B) = \frac{P(A_j)P(B | A_j)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A_j)}{P(B)},$$

kar pa je ravno definicija pogojne verjetnosti $P(A_j | B)$. □

Oglejmo si nekaj zgledov uporabe.

ZGLED: Tokrat imamo tovarno, v kateri trije stroji proizvajajo žebelje. Na uro prvi izdelava 3 000 žebeljev, drugi 5 000 žebeljev, tretji pa 10 000 žebeljev. Vemo tudi, da prvi stroj izdelava 1% žebeljev z napako, drugi stroj 2% žebeljev z napako, tretji pa 5% žebeljev z napako. Denimo, da smo naključno izbrali nek žebelj in ugotovili, da ima napako. Kolikšna je verjetnost, da je ta žebelj izdelal prvi stroj?

Označimo z A_1 , A_2 in A_3 dogodke, da je žebelj izdelal prvi, drugi, oziroma tretji stroj. Dogodek, da ima nek naključno izbrani žebelj napako, označimo z B . Zanima nas torej verjetnost $P(A_1 | B)$. Po Bayesovi formuli 2.5 je $P(A_1 | B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B|A_i)}$. Pripadajoče verjetnosti poznamo. Velja namreč $P(A_1) = 1/6$, $P(A_2) = 5/18$, $P(A_3) = 5/9$, $P(B | A_1) = 1/100$, $P(B | A_2) = 1/50$ in $P(B | A_3) = 1/20$. Vstavimo v zgornjo formulo, pa dobimo $P(A_1 | B) = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{100}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{100} + \frac{5}{18} \cdot \frac{1}{50} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{20}} = \frac{1}{21}$. ▲

ZGLED: Oglejmo si naslednjo izmišljeno situacijo. Pojavil se je nek nov smrtonosen virus, znastveniki pa si prizadevajo razviti test, ki bi učinkovito ugotavljal okužbe s tem virusom. Zaenkrat imajo test, ki ima naslednje karakteristike. V primeru, da je testirana oseba okužena z virusom, test v 98 procentih tudi zares pokaže okužbo, v primeru, da testirana oseba ni okužena, pa test "lažno" okuženost pokaže le za en promil takih primerov. Denimo, da je okužen približno en promil prebivalstva. Na prvi pogled se zdi test precej dober, a kmalu bomo videli, da v primeru, ko test pokaže okužbo, zelo težko sodimo o dejanski okuženosti testiranca. Izračunamo torej verjetnosti, da je človek, ki mu test pokaže okužbo, zares okužen.

Označimo z O dogodek, da je testirana oseba okužena, s T pa dogodek, da test pokaže okužbo. Po izreku o popolni verjetnosti je $P(T) = P(O)P(T | O) + P(\bar{O})P(T | \bar{O})$. Iz povedanega razberemo $P(O) = 0,001$ (in zato $P(\bar{O}) = 0,999$) ter $P(T | O) = 0,98$ in $P(T | \bar{O}) = 0,001$. Sledi $P(T) = 0,001 \cdot 0,98 + 0,999 \cdot 0,001 = 0,001979$. Sedaj lahko uporabimo še Bayesovo formulo. Dobimo $P(O | T) = \frac{P(T|O)P(O)}{P(T)} = \frac{0,98 \cdot 0,001}{0,001979} \approx 0,4952$. To pomeni, da je $P(\bar{O} | T) \approx 0,5048$. Če torej test pokaže okužbo, je celo malce bolj verjetno, da testirani sploh ni okužen, kot da je. Vendar pa sta obe verjetnosti tako blizu, da bi bila v tem primeru karkšnakoli napoved o okuženosti testiranca zgolj ugibanje. Če imamo možnost napraviti neodvisno ponovitev testa, je seveda zadeva precej drugačna. Izkaže se, da je verjetnost, da je testiranec zares okužen, če je tudi ponovitev testa potrdila okužbo, približno 99,9 procentov, verjetnost, da je okužen, če je ponovitev testa okužbo ovrгла, pa manj kot 2 procenta. Bralca vabimo, da potrdi te navedbe. ▲

Za konec tega poglavja si oglejmo še naslednji malce manj trivialen, a

zato toliko bolj zanimiv zgled.

ZGLED: Denimo, da dva igralca igrata naslednjo igro. Igra poteka v kolih, v vsakem kolu pa eden izmed igralcev zmagata in posledično od drugega igralca dobi en euro. Denimo, da je verjetnost, da v poljubnem kolu zmagata prvi igralec, enaka p , kjer je $0 < p < 1$. To seveda pomeni, da je verjetnost, da zmagata drugi igralec, enaka $1 - p$. Denimo, da imata na začetku igre oba igralca skupaj k eurov, od tega jih ima prvi igralec i , drugi pa seveda $k - i$. Igra se konča, ko enemu izmed igralcev zmanjka denarja. Zanima nas verjetnost dogodka, da bo denarja zmanjkalo drugemu igralcu.

Označimo s p_i , kjer je $0 \leq i \leq k$, verjetnost, da denarja zmanjka drugemu igralcu, če je imel prvi igralec na začetku i eurov. Seveda je $p_0 = 0$ in $p_k = 1$. Naj bo sedaj število i za trenutek fiksirano in označimo z A dogodek, da v prvem naslednjem kolu zmagata prvi igralec. Tedaj je seveda $\{A, \bar{A}\}$ particija prostora izidov in velja $P(A) = p$ in $P(\bar{A}) = 1 - p$. Če z B označimo dogodek, da bo denarja zmanjkalo drugemu igralcu, po izreku 2.4 o popolni verjetnosti velja $p_i = P(B) = P(A)P(B | A) + P(\bar{A})P(B | \bar{A})$. Ampak pri pogojni verjetnosti $P(B | A)$ se v resnici sprašujemo, kakšna je verjetnost, da bo prvi igralec zmagal, če ima na začetku $i + 1$ eurov (drugi igralec pa seveda $k - i - 1$ eurov). Le-ta torej znaša p_{i+1} . Podobno je $P(B | \bar{A}) = p_{i-1}$. Dobimo torej rekurzivno zvezo

$$p_i = p \cdot p_{i+1} + (1 - p) \cdot p_{i-1}.$$

Seveda ta zveza velja za vsak $i \geq 1$. Če jih izpišemo za vsak i posebej, dobimo

$$\begin{aligned} p_1 &= p \cdot p_2 \\ p_2 &= p \cdot p_3 + (1 - p)p_1 \\ p_3 &= p \cdot p_4 + (1 - p)p_2 \\ &\vdots \\ p_{k-2} &= p \cdot p_{k-1} + (1 - p)p_{k-3} \\ p_{k-1} &= p + (1 - p)p_{k-2}. \end{aligned}$$

Zaradi $0 < p < 1$ iz prve enakosti dobimo $p_2 = \frac{1}{p}p_1$, torej je $p_2 - p_1 = \frac{1-p}{p}p_1$. Podobno se druga enakost prepíše v $p_3 = \frac{1}{p}p_2 - \frac{1-p}{p}p_1$ in tako je $p_3 - p_2 =$

$\frac{1-p}{p}(p_2 - p_1) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 p_1$. Nadaljujemo, pa dobimo

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &= \frac{1-p}{p} p_1 \\ p_3 - p_2 &= \frac{1-p}{p} (p_2 - p_1) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 p_1 \\ p_4 - p_3 &= \frac{1-p}{p} (p_3 - p_2) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^3 p_1 \\ &\vdots \\ p_{k-1} - p_{k-2} &= \frac{1-p}{p} (p_{k-2} - p_{k-3}) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{k-2} p_1 \\ 1 - p_{k-1} &= \frac{1-p}{p} (p_{k-1} - p_{k-2}) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{k-1} p_1 \end{aligned}$$

Če seštejemo vse te enakosti, dobimo

$$1 - p_1 = p_1 \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1-p}{p}\right)^i.$$

Če označimo $q = \frac{1-p}{p}$, tako dobimo

$$\sum_{i=0}^{k-1} q^i = \frac{1}{p_1}.$$

Denimo sedaj, da je $p = \frac{1}{2}$, to je, da je na vsakem koraku verjetnost za zmago obeh igralcev enaka. Tedaj je $q = 1$, pa dobimo $p_1 = \frac{1}{k}$. Tedaj je $p_2 = p_1 + p_1 = \frac{2}{k}$, pa $p_3 = p_2 + p_1 = \frac{3}{k}$, itd. Dobimo torej, da je $p_j = \frac{j}{k}$. Če je torej igra poštena ($p = \frac{1}{2}$) in ima prvi igralec na začetku dva eura, drugi pa 98 eurov, je verjetnost za končno zmago prvega igralca enaka $\frac{2}{100}$, torej bora 2%.

Kaj pa, če $p \neq \frac{1}{2}$? Tedaj $q \neq 1$, pa se zgornja enakost prepiše v

$$\frac{1}{p_1} = \frac{q^k - 1}{q - 1},$$

oziroma

$$p_1 = \frac{q - 1}{q^k - 1}.$$

Iz zgornjih enakosti potem dobimo $p_2 = p_1 + q \cdot p_1 = \frac{q^2 - 1}{q^k - 1}$, pa potem $p_3 = p_2 + q^2 p_1 = (1 + q + q^2) p_1 = \frac{q^3 - 1}{q^k - 1}$, itd. Tako je

$$p_j = \frac{q^j - 1}{q^k - 1}.$$

To recimo pomeni, da v primeru, ko je $p = \frac{1}{3}$ (in zato $q = 2$) za $k = 100$ in $j = 98$ dobimo $p_{98} = \frac{2^{98}-1}{2^{100}-1} \approx 0,25$. Podobno za $k = 10\,000$ dobimo $p_{9\,998} \approx 0,25$. Je to presenetljivo? Kot zanimivost povejmo, da je za $k = 10\,000$ verjetnost $p_{9\,990}$ manjša od enega promila. To pomeni, da čeprav prvemu igralcu do zmage manjka samo 10 eurov (od 10 000), praktično ne more upati na zmago. In to pri predpostavki, da povprečno zmaga vsako tretjo igró!!! Podobno je tudi v primeru, ko prvi igralec v povprečju zmaga vsako peto od enajstih iger (torej skorajda vsako drugo), verjetnost $p_{9\,962}$ za $k = 10\,000$ manjša od promila. In čisto za konec, čeprav prvi igralec v povprečju zmaga vsako petstoto od 1001 igre, za $k = 10\,000$ dobimo $p_{9\,000} \approx 0,1356$. ▲

Naloga 2.11. Imamo tri žare. V prvi imamo po dve beli in rdeči kroglici ter po tri modre in rumene kroglice. V drugi žari imamo eno belo, dve rumeni, tri modre in štiri rdeče kroglice. V tretji žari imamo po dve kroglici vsake izmed štirih barv. Sedaj najprej iz prve žare naključno izberemo kroglico in jo damo v drugo žaro. Nato iz druge žare naključno izberemo kroglico. Izračunajte verjetnosti, da je ta kroglica bela, rdeča, modra oziroma rumena. Kaj pa če kroglico, iz zrebano iz druge žare, damo v tretjo žaro in nato iz te naključno izžrebamo eno kroglico. Kolikšna je verjetnost, da je izžrebana kroglica modra?

Naloga 2.12. Vrnimo se k posplošitvi problema Monty Hall s štirimi vratmi. Katera izmed štirih možnih strategij je najboljša?

Naloga 2.13. Iz kupa igralnih kart za remi (52 kart) naključno izvlečemo dve karti, najprej eno in nato še eno. Izračunajte verjetnost, da je prva karta kralj, če je tudi druga karta kralj.

Naloga 2.14. Janko se pripravlja za naslednji izpit iz cestno prometnih predpisov. Gre za izpit na obkrožanje, ki ima 20 vprašanj, pri vsakem vprašanju je ponujenih pet odgovorov, le eden pa je pravilen. Testiranec opravi izpit, če pravilno odgovori na vsaj 12 vprašanj. Denimo, da je Janko predelal le 60 procentov snovi in da na vprašanja iz snovi, ki jo je predelal, zagotovo odgovori pravilno, pri vprašanjih iz preostalega dela snovi pa odgovor izbere povsem naključno. Denimo, da je Janko na neko konkretno vprašanje odgovoril pravilno. Kolikšna je tedaj verjetnost, da je dejansko vedel, da je to zares pravilen odgovor?

Naloga 2.15. Denimo, da za test alkoholiziranosti, ki ga uporablja policija, velja, da je odstotek primerov, ko test pravilno identificira opitega voznika, enak odstotku primerov, ko test pravilno identificira, da je vsebnost alkohola testiranega voznika v dovoljenih mejah. Označimo to verjetnost s p . Denimo,

da je ob večernih urah med vikendi približno 5 odstotkov voznikov vinjenih. Kolikšna bi tedaj morala biti verjetnost p , da bi bilo med vozniki, ki jim test pokaže prekomerno alkoholiziranost, 90 odstotkov takih, ki so dejansko prekoračili dovoljene meje?

Naloga 2.16. Denimo, da ste se testirali za nek virus, ki ga ima v povprečju približno procent prebivalstva. Test ima naslednje lastnosti. Pri okuženih ljudeh potrdi prisotnost virusa v 98 odstotkih, pri neokuženih pa neokuženost potrdi v 95 odstotkih. Denimo, da vam test pokaže, da ste okuženi. Kolikšna je verjetnost, da ste zares okuženi. Kaj pa, če vam potem naredijo še eno neodvisno ponovitev testa. Če zopet pokaže okuženost, kolikšna je tedaj verjetnost, da ste zares okuženi? Kaj pa če v drugo test pokaže, da niste okuženi? Kolikšna je tedaj verjetnost, da ste vendarle okuženi z virusom?

Poglavje 3

Diskretne slučajne spremenljivke

Doslej smo se ukvarjali s poskusi, prostori izidov in verjetnostmi, definiranimi na pripadajočih prostorih izidov. S prostorom izidov in verjetnostjo P na S je informacija o poskusu, ki ga obravnavamo, popolna. Včasih pa nas ne zanimajo vse podrobnosti obravnavanega poskusa, temveč zgolj neke določene informacije o končnem izidu poskusa. Na primer, če šestkrat zapored vržemo kocko, nas morda zanima, kolikšna je vsota vseh pik, ki smo jih vrgli, ali morda maksimalno število pik na kaki kocki, pa tudi število šestic bi nas utegnilo zanimati. Če opazujemo volitve, nas običajno ne zanima kdo je glasoval za koga, temveč le koliko ljudi je glasovalo za posameznega kandidata. Vse te vrednosti so neke funkcije iz prostora izidov v realna števila. Predno jim damo posebno ime, sklenimo še naslednji dogovor. Kadarkoli bomo imeli opraviti z nekim poskusom, za katerega bo podan prostor izidov S in verjetnost P na S , bomo rekli, da je par (S, P) *verjetnosti prostor*.

Definicija. Naj bo (S, P) verjetnostni prostor. *Slučajna spremenljivka* na tem prostoru je tedaj vsaka funkcija $X: S \rightarrow \mathbb{R}$.

Glede na to, da je slučajna spremenljivka funkcija iz prostora izidov v množico realnih števil, se sicer zdi, da verjetnosti P ne potrebujemo. Seveda pa nas bo pri obravnavi slučajnih spremenljivk zanimala verjetnost, da slučajna spremenljivka zavzame neko konkretno vrednost. Takrat bomo potrebovali informacijo o verjetnostih pripadajočih izidov.

Za nas bo torej slučajna spremenljivka na danem prostoru izidov S vsaka funkcija $X: S \rightarrow \mathbb{R}$. Na nek način torej lahko rečemo, da slučajna spremenljivka prostor izidov S transformira v nek drug prostor izidov $X(S) \subset \mathbb{R}$. Seveda je potem potrebno na novo določiti pripadajoče verjetnosti dogodkov. Nekatere slučajne spremenljivke imajo še posebej lepe dodatne lastnosti. Mi

bomo obravnavali tako imenovane diskretne slučajne spremenljivke in zvezne slučajne spremenljivke. V tem poglavju se bomo posvetili diskretnim.

3.1 Diskretne slučajne spremenljivke ter verjetnostne in porazdelitvene funkcije

Zapišimo najprej formalno definicijo diskretne slučajne spremenljivke.

Definicija. Naj bo (S, P) verjetnostni prostor. *Diskretna slučajna spremenljivka* na prostoru (S, P) je vsaka funkcija $X: S \rightarrow \mathbb{R}$, za katero velja, da je *slika prostora izidov* $X(S) = \{X(s) : s \in S\}$ števna množica.

Dogovorimo se, da bomo za vsak dogodek $A \subseteq S$ z $X(A)$ označili sliko $X(A) = \{X(s) : s \in A\}$.

ZGLED: Imejmo poskus meta poštene kocke in denimo, da igramo igro, pri kateri izgubimo en euro, če pade sodo število pik, ne izgubimo niti ne dobimo nič, če pade 3 in dobimo dva eura, če pade 1 ali 5. Naš “dobiček” pri tej igri je tedaj diskretna slučajna spremenljivka X , ki lahko zavzame le tri vrednosti in sicer je

$$X(2) = X(4) = X(6) = -1, \quad X(3) = 0, \quad X(1) = X(5) = 2.$$

▲

Naj bo sedaj $X: S \rightarrow \mathbb{R}$ diskretna slučajna spremenljivka in naj bo $x \in \mathbb{R}$. Tedaj je $X^{-1}(x) = \{s \in S : X(s) = x\} \subseteq S$, torej je $X^{-1}(x)$ dogodek za ta poskus. Gre seveda za dogodek, da slučajna spremenljivka X zavzame vrednost x . Za neko konkretno vrednost x nas bo morda zanimala verjetnost tega dogodka, to je $P(X^{-1}(x))$. Dogovorimo se, da bomo to verjetnost na kratko označili kar s $P(X = x)$.

Definicija. Naj bo $X: S \rightarrow \mathbb{R}$ diskretna slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru (S, P) . Tedaj je *verjetnostna funkcija* diskretne slučajne spremenljivke X funkcija $p_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, podana s predpisom

$$p_X(x) = P(X = x).$$

Diskretna slučajna spremenljivka torej prostor izidov S transformira v števeni “prostor izidov” $X(S)$ s pripadajočimi verjetnostmi elementarnih dogodkov $p_X(x)$, $x \in X(S)$.

Predno si ogledamo konkreten zgled, opazimo naslednjo, dokaj očitno, a zelo pomembno lastnost verjetnostnih funkcij diskretnih slučajnih spremenljivk.

Trditev 3.1. *Naj bo $X: S \rightarrow \mathbb{R}$ diskretna slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru (S, P) . Tedaj za vsak $x \in \mathbb{R} \setminus X(S)$ velja $p_X(x) = 0$, velja pa tudi $\sum_{x \in X(S)} p_X(x) = 1$.*

DOKAZ: Prvi del trditve sledi neposredno iz trditve 1.1, saj za $x \in \mathbb{R} \setminus X(S)$ dobimo $X^{-1}(x) = \emptyset$. Za drugi del se je treba zgolj spomniti, da je za diskretno slučajno spremenljivko X množica $X(S)$ po definiciji števna. Ker so dogodki $X^{-1}(x)$, $x \in X(S)$, očitno paroma disjunktni, je torej $S = \cup_{x \in X(S)} X^{-1}(x)$ števna unija paroma disjunktnih dogodkov in tako rezultat sledi po 2. in 3. aksiomu verjetnosti, oziroma trditvi 1.2. \square

ZGLED: Imejmo poskus meta petih uravnoveženih kovancev. Zanima nas koliko cifer pade. V tem primeru je prostor izidov $S = \{0, 1\}^5$ množica nizov dolžine 5, katerih komponente imajo vrednosti 0 ali 1. Pri tem naj vrednost 0 pomeni, da na pripadajočem kovancu pade grb, vrednost 1 pa da pade cifra. Če z $X: S \rightarrow \mathbb{R}$ označimo funkcijo, za katero je $X(s)$ kar vsota komponent, je $X(s)$ ravno število cifer, ki pade. Očitno X zasede le vrednosti med 0 in 5. Pa izračunajmo vrednosti pripadajoče verjetnostne funkcije p_X . Po zgornji trditvi moramo izračunati le vrednosti $p_X(0)$, $p_X(1)$, $p_X(2)$, $p_X(3)$, $p_X(4)$ in $p_X(5)$. Vsota vseh teh vrednosti mora biti po tej trditvi ravno 1. No, edini izid, pri katerem je vrednost slučajne spremenljivke X enaka 0, je $[0, 0, 0, 0, 0]$. Verjetnost pripadajočega elementarnega dogodka je seveda $\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$. Vrednost $p_X(1)$ bi lahko izračunali tako, da bi ugotovili, da je $X^{-1}(1) = \{[1, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 1]\}$, od koder seveda sledi $p_X(1) = \frac{5}{32}$. V resnici pa je potrebno zgolj opaziti, da je izidov z eno enico ravno $\binom{5}{1} = 5$ (posameznih izidov torej ni treba eksplicitno naštevati). No, podobno potem dobimo še $p_X(2) = \frac{\binom{5}{2}}{32} = \frac{5}{16}$, $p_X(3) = \frac{\binom{5}{3}}{32} = \frac{5}{16}$, $p_X(4) = \frac{5}{32}$ in $p_X(5) = \frac{1}{32}$. Opazimo, da je res $\frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = 1$, kot trdi trditev 3.1. \blacktriangle

Še naslednje velja opaziti. Po izreku 1.3 za vsako števno množico $S = \{r_i : i \in I\}$ različnih realnih števil in vsak nabor nenegativnih števil p_i , $i \in I$, za katere je $\sum_{i \in I} p_i = 1$, obstaja verjetnost na prostoru izidov S in verjetnost P na S , da je $P(r_i) = p_i$ za vse $i \in I$. Potemtakem obstaja tudi diskretna slučajna spremenljivka X , za katero je kar $X(r_i) = r_i$ in posledično $p_X(r_i) = p_i$ za vse $i \in I$ in $p_X(r) = 0$ za vse $r \in \mathbb{R} \setminus S$. To pomeni, da lahko vsako diskretno slučajno spremenljivko podamo preprosto

tako, da zgolj določimo množico vrednosti, ki jih lahko zavzame, in za vsako izmed njih podamo pripadajočo verjetnost (pri čemer je seveda vsota teh števil 1). Na ta način torej pripadajočega verjetnostnega prostora sploh ne potrebujemo. S tem smo tako dokazali naslednji rezultat.

Posledica 3.2. *Naj bo I poljubna števna množica in naj bo $R = \{r_i : i \in I, r_i \neq r_j \text{ za } i \neq j\} \subset \mathbb{R}$ poljuben nabor realnih števil, $\{p_i : i \in I \subset [0, 1]\}$ pa poljuben nabor vrednosti z intervala $[0, 1]$, tako da je $\sum_{i \in I} p_i = 1$. Tedaj obstaja verjetnostni prostor (S, P) in diskretna slučajna spremenljivka X na S , da je $X(S) = R$ in velja $p_X(r_i) = p_i$ za vse $i \in I$.*

ZGLED: Naj bo X diskretna slučajna spremenljivka, katere slika (torej zaloga vrednosti) je $\{-1, 0, 1, 2\}$, njena verjetnostna funkcija p_X pa je podana tako, da je $p_X(-1) = 1/25$, $p_X(0) = p_X(1) = 1/5$, $p_X(2) = 14/25$ in $p_X(x) = 0$ za vse ostale $x \in \mathbb{R}$. Naj bo sedaj slučajna spremenljivka Y podana s predpisom $Y = X^2$, to je $Y(s) = (X(s))^2$. Slučajna spremenljivka Y je tedaj seveda diskretna slučajna spremenljivka, saj je njena slika $\{0, 1, 4\}$. Določimo njeno verjetnostno funkcijo p_Y . Očitno je $p_Y(0) = p_X(0) = 1/5$ in $p_Y(4) = p_X(2) = 14/25$. Potem dobimo še $p_Y(1) = p_X(-1) + p_X(1) = 6/25$. ▲

Doslej smo govorili le o verjetnostih, da slučajna spremenljivka X zavzame neko konkretno vrednost x , torej $P(X^{-1}(x))$. Včasih nas zanima tudi kolikšna je verjetnost, da je vrednost (ne nujno diskretne) slučajne spremenljivke največ x , to je, zanima nas verjetnost dogodka $\{s \in S : X(s) \leq x\}$, ki jo označimo s $P(X \leq x)$.

Definicija. Naj bo $X: S \rightarrow \mathbb{R}$ slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru (S, P) . Tedaj je njena *porazdelitvena funkcija* $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ podana s predpisom

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\{s \in S : X(s) \leq x\}).$$

V resnici se izkaže, da, razen za diskretne slučajne spremenljivke, za splošne slučajne spremenljivke (tudi zvezne) o verjetnostih posameznih vrednosti slučajne spremenljivke sploh ni smiselno govoriti. V takih primerih potem operiramo predvsem s porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke. Kot pokaže naslednja trditev, je v primeru diskretnih slučajnih spremenljivk vsa informacija "zapisana" tako v njeni verjetnostni funkciji, kot tudi njeni porazdelitveni funkciji, saj eno lahko dobimo iz druge in obratno.

Trditev 3.3. *Naj bo X diskretna slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru (S, P) in naj bosta p_X in F_X njena verjetnostna in porazdelitvena*

funkcija. Tedaj za poljuben $x \in \mathbb{R}$ velja

$$F_X(x) = \sum_{a \in X(S), a \leq x} p_X(a).$$

DOKAZ: Dokaz je povsem analogen dokazu trditve 3.1, saj je dogodek $\{s \in S : X(s) \leq x\}$ števna unija paroma disjunktnih dogodkov $\{s \in S : X(s) = a\}$, $a \leq x$, $a \in X(S)$. \square

Utemeljimo še trditev iz zgornjega odstavka. Da je porazdelitvena funkcija diskrente slučajne spremenljivke X natanko določena z njeno verjetnostno funkcijo, smo pravkar dokazali. Poglejmo še, kako je z obratom, pri čemer se posvetimo primeru, ko je slika $X(S)$ končna (primer, ko je števno neskončna, je nekoliko bolj zapleten, zato ga tu ne bomo obdelali). Denimo, da poznamo porazdelitveno funkcijo F_X in naj bo $x \in X(S)$ poljubna vrednost, ki jo lahko zavzame diskretna slučajna spremenljivka X . Ker je $X(S)$ končna množica, obstaja $\varepsilon > 0$, da znotraj intervala $(x - \varepsilon, x)$ ni nobenega elementa množice $X(S)$. Tedaj pa po trditvi 3.3 velja $F_X(x) = F_X(x - \varepsilon) + p_X(x)$, od koder torej lahko izračunamo vrednost $p_X(x)$.

Iz zgornje trditve nemudoma sledi, da je porazdelitvena funkcija diskretne slučajne spremenljivke naraščajoča funkcija (kot pokaže spodnja trditev 3.4 je to res za vsako slučajno spremenljivko), ki je odsekoma konstantna (njena vrednost se spremeni le v točkah $x \in X(S)$, kjer poskoči za $p_X(x)$).

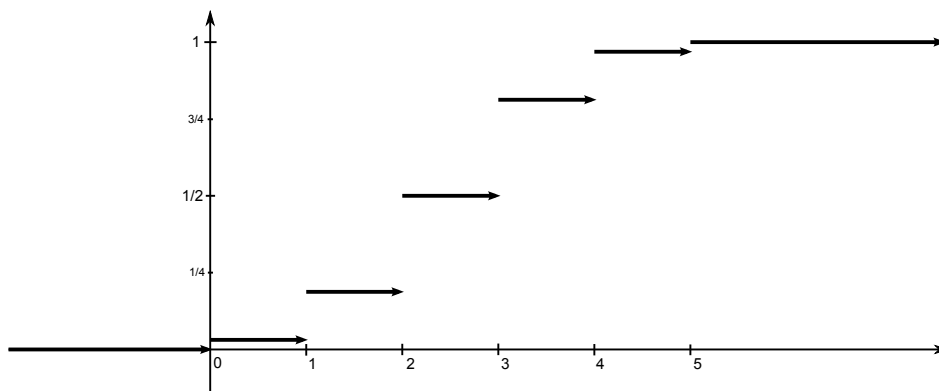
ZGLED: Naj bo X kot v zgornjem primeru meta petih uravnoveženih kovanecv. Po zgornjem tedaj dobimo

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \frac{1}{32} & ; 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{16} & ; 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2} & ; 2 \leq x < 3 \\ \frac{13}{16} & ; 3 \leq x < 4 \\ \frac{31}{32} & ; 4 \leq x < 5 \\ 1 & ; x \geq 5 \end{cases} .$$

Graf porazdelitvene funkcije F_X je prikazan na sliki 3.1. \blacktriangle

Predno zaključimo ta razdelek, opazimo še naslednje pomembne lastnosti porazdelitvene funkcije (poljubne) slučajne spremenljivke.

Trditev 3.4. *Naj bo $X: S \rightarrow \mathbb{R}$ slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru (S, P) in naj bo F_X njena porazdelitvena funkcija. Tedaj velja naslednje:*



Slika 3.1: Porazdelitvena funkcija za diskretno slučajno spremenljivko, ki meri število cifer pri metu petih poštenih kovancev.

- (i) F_X je naraščajoča funkcija, to je, za $x_1 \leq x_2$ je $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$.
- (ii) Za poljubni realni števili $x_1 < x_2$ velja $P(x_1 < X \leq x_2) = P(\{s \in S : x_1 < X(s) \leq x_2\}) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$.
- (iii) Velja $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ in $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$.
- (iv) Porazdelitvena funkcija F_X je zvezna z desne, to je, za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $F_X(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} F_X(x + \varepsilon)$.

DOKAZ: Prva točka sledi neposredno iz izreka 1.4 in dejstva, da je za $x_1 \leq x_2$ dogodek $\{s \in S : X(s) \leq x_1\}$ poddogodek dogodka $\{s \in S : X(s) \leq x_2\}$. Tudi druga točka sledi iz izreka 1.4, saj je $\{s \in S : x_1 < X(s) \leq x_2\} = \{s \in S : X(s) \leq x_2\} \setminus \{s \in S : X(s) \leq x_1\}$. Za preostali dve točki je potrebnega precej več dela, zato bomo zaradi pomanjkanja časa ta del izpustili. \square

Naloga 3.1. Imejmo tetraeder, katerega ploskve so označene s števili od 1 do 4, pri tem pa je verjetnost, da tetraeder pristane na ploskvi 1, enaka verjetnosti, da pristane na ploskvi 4, in je enaka $1/3$, prav tako pa sta enaki verjetnosti pristanka na ploskvi 2 oziroma 3 (ki sta potemtakem obe enaki $1/6$). Trikrat zapored vržemo tetraeder. Naj slučajna spremenljivka X meri vsoto števil na ploskvah, na katerih pristane tetraeder, slučajna spremenljivka Y pa maksimalno številko ploskve, na kateri pristane tetraeder. Določite verjetnostni funkciji spremenljivk X in Y .

Naloga 3.2. Denimo, da je X diskretna slučajna spremenljivka, katere po-

razdelitvena funkcija ima sledeči predpis:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < -3 \\ \frac{1}{12} & ; -3 \leq x < 5 \\ \frac{1}{4} & ; 5 \leq x < 6 \\ \frac{1}{2} & ; 6 \leq x < 9 \\ 1 & ; x \geq 9 \end{cases} .$$

Določite njeno verjetnostno funkcijo.

Naloga 3.3. Tokrat imamo pošten tetraeder, katerega ploskve so označene s števili od 1 do 4. Mečemo ga tako dolgo, dokler ni vsota števil na ploskvah, na katerih pristane tetraeder, vsaj 6. Naj diskretna slučajna spremenljivka meri število metov. Določite njeno sliko $X(S)$ in njeno porazdelitveno funkcijo F_X .

Naloga 3.4. Denimo, da je X diskretna slučajna spremenljivka, katere porazdelitvena funkcija ima sledeči predpis:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \frac{1}{4} & ; 0 \leq x < 2 \\ a & ; 2 \leq x < 4 \\ b & ; 4 \leq x < 6 \\ 1 & ; x \geq 6 \end{cases} ,$$

kjer sta a in b neki realni števili. Določite vrednosti a in b , če veste, da je $P(1 < X < 5) =$ Določite njeno verjetnostno funkcijo.

3.2 Primeri diskretnih slučajnih spremenljivk

V tem razdelku si bomo ogledali nekaj najpomembnejših diskretnih slučajnih spremenljivk. Pomembne so tudi v statistiki, zato si jih velja dobro zapomniti. Kot smo omenili zgoraj, je vsa informacija o diskretni slučajni spremenljivki podana z njeno sliko (zalogo vrednosti) in pripadajočo verjetnostno ali porazdelitveno funkcijo. Na ta način so tudi podane vse spodaj naštetje diskretne slučajne spremenljivke. V vseh naštetih primerih je p neko število med 0 in 1, to je $0 \leq p \leq 1$ in naj bo n neko naravno število. Dogovorimo se tudi, da označimo $q = 1 - p$.

- **DISKRETNA ENAKOMERNA PORAZDELITEV:** Pravimo, da ima diskretna slučajna spremenljivka X *diskretno enakomerno porazdelitev* s parametri n, a in b (oznaka $X \sim U(n; a, b)$), kjer je $n \geq 2$ in $a < b$,

če je njena slika $\{a, a + \frac{b-a}{n-1}, a + 2\frac{b-a}{n-1}, \dots, a + (n-2)\frac{b-a}{n-1}, b\}$ in velja $p_X(a + i\frac{b-a}{n-1}) = \frac{1}{n}$ za vse $0 \leq i \leq n-1$. V tem primeru ima torej X natanko n enako verjetnih možnih vrednosti, ki so enakomerno razporejene med vključno a in b . Ker je vrednosti n in ima vsaka od njih verjetnost $\frac{1}{n}$, seveda velja $\sum_{x \in X(S)} p_X(x) = 1$. Model diskretne slučajne spremenljivke z diskretno enakomerno porazdelitvijo dobimo pri metu poštene kocke. V tem primeru gre za spremenljivko s porazdelitvijo $X \sim U(6; 1, 6)$.

- **BERNOULLIJEVA PORAZDELITEV:** Pravimo, da ima diskretna slučajna spremenljivka X *Bernoullijevo porazdelitev* s parametrom p (oznaka $X \sim Ber(p)$), če je njena slika $\{0, 1\}$ (zavzame lahko torej le dve vrednosti) in velja $P(X = 1) = p$ in $P(X = 0) = 1 - p$. To seveda pomeni, da je njena verjetnostna funkcija podana s predpisom

$$p_X(x) = \begin{cases} 1 - p & ; x = 0 \\ p & ; x = 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

Model diskretne slučajne spremenljivke z Bernoullijevo porazdelitvijo dobimo pri metu kovanca, pri čemer X meri ali smo zadeli cifro (vrednost 1) ali ne (vrednost 0).

- **BINOMSKA PORAZDELITEV:** Pravimo, da ima diskretna slučajna spremenljivka X *binomsko porazdelitev* s parametroma n in p (oznaka $X \sim Bin(n, p)$), če je njena slika $\{0, 1, \dots, n\}$ in velja

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad \text{za vse } k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

Bralec bo opazil, da po binomskem izreku velja $1 = 1^n = (p + q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, torej je tako podana funkcija X res diskretna slučajna spremenljivka. Model diskretne slučajne spremenljivke z binomsko porazdelitvijo dobimo pri n neodvisnih metih kovanca z verjetnostjo cifre p , pri čemer X meri število cifer, ki smo jih vrgli.

- **NEGATIVNA BINOMSKA PORAZDELITEV:** Pravimo, da ima diskretna slučajna spremenljivka X *negativno binomsko porazdelitev* s parametroma r in p (oznaka $X \sim NBin(r, p)$), če so njena slika vsa nenegativna cela števila $\mathbb{N} \cup \{0\}$ in velja

$$p_X(k) = \binom{r+k-1}{k} p^r q^k, \quad \text{za vse } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Da se prepričamo, da zares velja $\sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) = 1$, je potrebnega nekaj več dela. Spomniti se je treba Taylorjevega razvoja funkcije $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, v potenčno vrsto okrog točke $x = 0$. Dobimo $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$, kjer je $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. Če v to formulo vstavimo $x = -q$ in $\alpha = -r$, dobimo $\frac{1}{p^r} = (1-q)^{-r} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-r}{k} (-q)^k$. Upoštevamo še, da je $\binom{-r}{k} = (-1)^k \frac{r(r+1)(r+2)\cdots(r+k-1)}{k!} = (-1)^k \binom{r+k-1}{k}$, pa dobimo $\sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) = p^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} q^k = p^r \frac{1}{p^r} = 1$, kot smo trdili. Model diskretne slučajne spremenljivke z negativno binomsko porazdelitvijo dobimo, če kovanec z verjetnostjo cifre p mečemo toliko časa, da dobimo r cifer, pri tem pa X meri število grbov, ki so padli pri teh metih.

- GEOMETRIJSKA PORAZDELITEV: Pravimo, da ima diskretna slučajna spremenljivka X *geometrijsko porazdelitev* s parametrom $p > 0$ (oznaka $X \sim \text{Geo}(p)$), če so njena slika kar vsa naravna števila \mathbb{N} (začeni s 1) in velja

$$p_X(k) = pq^{k-1}, \quad \text{za vse } k \in \mathbb{N}.$$

Hitro se prepričamo, da tudi tokrat velja $\sum_{k \in \mathbb{N}} pq^{k-1} = p \frac{1}{1-q} = 1$. Model diskretne slučajne spremenljivke z geometrijsko porazdelitvijo dobimo, če kovanec z verjetnostjo cifre p mečemo toliko časa, dokler prvič ne dobimo cifre, pri tem pa X meri število potrebnih metov.

- POISSONOVA PORAZDELITEV: Pravimo, da ima diskretna slučajna spremenljivka X *Poissonovo porazdelitev* s parametrom $\lambda > 0$ (oznaka $X \sim \text{Poiss}(\lambda)$), če so njena slika vsa nenegativna cela števila $\mathbb{N} \cup \{0\}$ in velja

$$p_X(k) = \frac{1}{k!} \lambda^k e^{-\lambda}, \quad \text{za vse } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Prepričamo se lahko, da tudi tukaj velja $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^\lambda = 1$. Omeniti velja, da je za zelo velike vrednosti parametra n in majhne vrednosti parametra p Poissonova porazdelitev zelo dober približek za binomsko porazdelitev, kjer za λ vzamemo $\lambda = pn$.

Oglejmo si nekaj zgledov.

ZGLED: V tovarni izdelujejo kolesarske zračnice. Tu in tam se zgodi, da je kakšna zračnica preluknjana in je kot taka neuporabna. Denimo, da je v povprečju preluknjana vsaka stota izdelana zračnica, to je, za vsako izdelano zračnico je verjetnost, da je preluknjana, en procent. Denimo, da so nekega dne izdelali 1000 zračnic. Naj X meri število preluknjanih zračnic, ki so jih izdelali ta dan. Tedaj ima X očitno binomsko porazdelitev

$X \sim \text{Bin}(1000, 1/100)$. Izračunajmo verjetnost, da so ta dan izdelali vsaj 15 preluknjanih zračnic. Zanima nas seveda verjetnost $P(X \geq 15) = 1 - P(X < 15) = P(X \leq 14)$. Glede na trditev 3.3 je torej iskana verjetnost $P(X \geq 15) = 1 - (p_X(0) + p_X(1) + \dots + p_X(14))$. Če upoštevamo še dejstvo $p_X(k) = \binom{1000}{k} p^k (1-p)^{1000-k}$, dobimo $P(X \leq 14) \doteq 0,9176$, torej je verjetnost $P(X \geq 15) \doteq 0,0824$. ▲

ZGLED: Denimo da lokostrellec strelja v tarčo, njegov edini cilj pa je zadeti desetico. Denimo, da so posamezni strelji neodvisni med seboj in da pri vsakem strelu desetico zadane z verjetnostjo 5 procentov. Naj X opisuje število strellov, ki so potrebni, da zadane desetico. Če privzamemo, da vsakih 10 sekund izstrelimo po eno puščico, kolikšna je tedaj verjetnost, da bo desetico zadel prej kot v dveh minutah? Seveda gre za diskretno slučajno spremenljivko z geometrijsko porazdelitvijo $X \sim \text{Geo}(1/20)$. Zanima nas seveda $F_X(11)$. Po trditvi 3.3 je $F_X(11) = p_X(1) + p_X(2) + \dots + p_X(11)$. Ob upoštevanju $p_X(k) = p \cdot (1-p)^{k-1}$, kjer je $p = 1/20$, dobimo $F_X(11) \doteq 0,4312$. Na podoben način lahko izračunamo, da je verjetnost, da desetico zadane v roku desetih minut, nekaj več kot 95 procentov. ▲

Naloga 3.5. Naj bo X diskretna slučajna spremenljivka z diskretno enakomerno porazdelitvijo $X \sim U(20; 1, 20)$. Izračunajte verjetnosti $P(X > 10)$, $P(X < 5)$ in $P(6 < X < 13)$.

Naloga 3.6. Denimo, da imamo deset poštenih kovancev. Vse naenkrat vržemo, nato pa vse tiste, na katerih se ni pojavila cifra, vržemo še enkrat. Zanima nas število vseh dobljenih cifr X . Kakšno porazdelitev ima slučajna spremenljivka X ? Izračunajte verjetnost $P(4 \leq X \leq 6)$.

Naloga 3.7. Nek avtomobilski tat poizkuša z vlamljanjem v avtomobile. Denimo, da je verjetnost uspeha vloma v posamezni avto enaka 10 procentov in da so uspešnosti posameznih poskusov vloma neodvisne. Tat bo prenehal s svojim nečednim delom šele, ko bo uspešno vlomil v tri avtomobile. Naj X meri število poskusov vloma. Kakšno porazdelitev ima tedaj slučajna spremenljivka X ? Izračunajte verjetnost, da bo poizkusil vlomiti natanko desetkrat. Kakšna pa je verjetnost, da bo poizkusil vlomiti vsaj desetkrat?

3.3 Matematično upanje diskretnih slučajnih spremenljivk

Spomnimo se poskusa meta poštene kocke. Ker je kocka poštena, pričakujemo, da bo pri velikem številu metov padlo približno enako mnogo enic,

dvojk, trojk, itd. Povedano drugače, pričakujemo, da bo v n metih padlo približno po $\frac{n}{6}$ enic, dvojk, itd. To pomeni, da je povprečje števil, ki jih dobimo v n metih, približno $\frac{\frac{n}{6} \cdot 1 + \frac{n}{6} \cdot 2 + \dots + \frac{n}{6} \cdot 6}{n} = \frac{7}{2}$. Lahko torej rečemo, da v povprečju pade 3,5 pik.

Oglejmo si še naslednjo situacijo. Denimo, da imamo neuravnotežen kovanec, na katerem cifra pade z verjetnostjo $1/3$. Z njim igramo igro, pri kateri mečemo ta kovanec in vsakič, ko pade cifra, dobimo dva eura, ko pade grb, pa moramo en euro plačati. Kako je tedaj z našim dobičkom? Glede na neuravnoteženost kovanca pričakujemo, da bomo za velike n v n metih dobili po dva eura približno $n/3$ -krat, po drugi strani pa bomo približno $2n/3$ -krat en euro plačali. To pomeni, da bomo v n metih dobili približno $2 \cdot n/3$ eurov, hkrati pa bomo približno $2n/3$ eurov tudi plačali. Pričakujemo torej, da bomo po velikem številu iger približno v takem finančnem stanju, kot smo bili na začetku igre. V povprečju torej niti nič ne dobimo niti nič ne izgubimo.

V obeh zgornjih konkretnih primerih smo govorili o neke vrste povprečju diskretnih slučajnih spremenljivk. To idejo povprečja sedaj formalizirajmo.

Definicija. Naj bo X diskretna slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru (S, P) . Matematično upanje spremenljivke X , ki ga označimo z $E(X)$, je podano s predpisom

$$E(X) = \sum_{x \in X(S)} x \cdot p_X(x) = \sum_{x \in X(S)} x \cdot P(X = x),$$

če ta vrsta konvergira absolutno (to je, če je $\sum_{x \in X(S)} |xP(X = x)| < \infty$).

Opazimo, da je torej matematično upanje diskretne slučajne spremenljivke neka konstanta.

ZGLED: Naj bosta X in Y diskretni slučajni spremenljivki kot v zgledu iz razdelka 3.1, to je, $X(S) = \{-1, 0, 1, 2\}$ z verjetnostno funkcijo $p_X(-1) = 1/25$, $p_X(0) = p_X(1) = 1/5$ in $p_X(2) = 14/25$, ter $Y = X^2$. Izračunajmo tedaj matematični upanji $E(X)$ in $E(Y)$. Po definiciji je $E(X) = (-1) \cdot 1/25 + 0 \cdot 1/5 + 1 \cdot 1/5 + 2 \cdot 14/25 = 32/25$. Ker je $Y(S) = \{0, 1, 4\}$ in je $p_Y(0) = 1/5$, $p_Y(1) = 6/25$ in $p_Y(4) = 14/25$, dobimo še $E(Y) = 1 \cdot 6/25 + 4 \cdot 14/25 = 62/25$. Vidimo, da je torej v tem primeru $E(X^2) \neq E(X)^2$. ▲

ZGLED: Pri evropski verziji igre ruleta je na okrogli številčnici 37 števil, od vključno 0 do 36. Če stavimo na posamezno številko in je ta številka dejansko izžrebana, dobimo za vsak vplačan euro 36 eurov (našega in še 35 dodatnih).

Če je izžrebana kaka druga številka, seveda ne dobimo nič. Pri tej igri so dovoljene tudi stave na dve, tri, štiri, 6, 12 ali celo 18 števil hkrati (ne katerih koli), a mi malce poenostavimo zadevo in privzemimo, da vedno stavimo le na eno število. Naj X meri zaslužek (oziroma izgubo) pri posamezni igri. Kolikšno je tedaj matematično upanje $E(X)$? Če privzamemo, da je naprava za igro rulete poštena, je verjetnost, da bo izžrebana "naša" številka, enaka $1/37$. Potemtakem je verjetnost, da "naša" številka ne bo izžrebana, enaka $36/37$. Po zgornji definiciji je tako matematično upanje $E(X)$ enako $E(X) = 35 \cdot 1/37 + (-1) \cdot 36/37 = -1/37$. V povprečju torej pri vsaki igri izgubimo po $1/37$ eura. ▲

Posvetimo se sedaj matematičnim upanjem najbolj znanih diskretnih slučajnih spremenljivk.

ZGLED: Naj bo $X \sim U(n; a, b)$ diskretna slučajna spremenljivka z enakomerno porazdelitvijo na intervalu $[a, b]$. Po definiciji je $E(X) = \sum_{i=0}^{n-1} (a + i \frac{b-a}{n-1}) \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(na + \frac{(n-1)n}{2} \frac{b-a}{n-1} \right) = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$. ▲

ZGLED: Izračunajmo matematično upanje za diskretno slučajno spremenljivko z Bernoullijevo porazdelitvijo. Naj bo torej $X \sim Ber(p)$. Tedaj je seveda $E(X) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$. ▲

ZGLED: Naj bo sedaj $X \sim Bin(n, p)$. Tokrat imamo nekaj več dela. V tem primeru moramo namreč izračunati vsoto $E(X) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, kjer je $q = 1 - p$. Opazimo, da za funkcijo $h(x) = (x+q)^n$ velja $h'(x) = n(x+q)^{n-1}$. Po drugi strani je seveda $h(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k q^{n-k}$, torej je $h'(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^{k-1} q^{n-k}$. To pomeni, da je $p \cdot h'(p) = E(X)$. Ker je $h'(p) = n \cdot 1^{n-1} = n$, je potemtakem $E(X) = np$. ▲

ZGLED: Naj bo tokrat $X \sim NBin(r, p)$. Spomnimo se, da je v tem primeru $p_X(k) = \binom{r+k-1}{k} p^r q^k$, kjer je $q = 1 - p$, in da za $f(x) = (1-x)^{-r}$ velja $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} x^k$. Ta vrsta za $|x| < 1$ absolutno konvergira, torej jo lahko členoma odvajamo. Dobimo $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k \binom{r+k-1}{k} x^{k-1}$. To pomeni, da je $qp^r f'(q) = \sum_{k=0}^{\infty} k \binom{r+k-1}{k} p^r q^k = E(X)$. Upoštevamo, da je $f'(x) = r(1-x)^{-r-1}$, pa dobimo $E(X) = qp^r \frac{r}{p^{r+1}} = \frac{qr}{p}$. ▲

ZGLED: Da izračunamo matematično upanje slučajne spremenljivke X z geometrijsko porazdelitvijo $X \sim Geo(p)$, se je treba spomniti, da je za $0 < q < 1$ vrsta $\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ absolutno konvergentna in jo zato smemo členoma

odvajati na q . Dobimo $\frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} kq^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}$. Tako je $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$. ▲

ZGLED: Izračunajmo še matematično upanje diskretne slučajne spremenljivke X s Poissonovo porazdelitvijo, torej $X \sim Poiss(\lambda)$. V tem primeru računamo neskončno vsoto $\sum_{k=0}^{\infty} (k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!})$. Po kratkem računu dobimo

$$\begin{aligned} E(X) &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (k \frac{\lambda^k}{k!}) \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\ell}}{\ell!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

Parameter λ pri diskretni slučajni spremenljivki s Poissonovo porazdelitvijo torej predstavlja ravno njeno matematično upanje. ▲

ZGLED: Privzemimo, da je žrebanje številok LOTA zares povsem naključno (to je, vsaka kombinacija sedmih izžrebanih števil je enako verjetna). Tedaj je verjetnost, da pri vplačnem kombinacijskem listku z osmimi kombinacijami “zadanemo” sedmico enaka $\frac{8}{\binom{39}{7}} = \frac{8}{15\,380\,937} \approx 5,2 \cdot 10^{-7}$. Denimo, da LOTO igramo tako dolgo, dokler ne zadanemo sedmice, pri tem pa nas zanima koliko kol bomo morali igrati. Očitno gre za geometrijsko porazdeljeno diskretno slučajno spremenljivko. Po zgornjem to torej pomeni, da je pričakovano število vplačil kombinacijskega listka z osmimi števili, da bomo končno zadeli sedmico, $\frac{15\,380\,937}{8} \approx 1\,922\,617$. Ob predpostavki, da sta vsak teden na sporedu dve žrebanji, to pomeni več kot osemnjast tisoč let. ▲

Predno nadaljujemo opazimo naslednjo pomembno lastnost diskretnih slučajnih spremenljivk.

Trditev 3.5. *Naj bo $X: S \rightarrow \mathbb{R}$ diskretna slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru (S, P) in naj bo $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ poljubna funkcija. Tedaj je tudi $Y = g \circ X: S \rightarrow \mathbb{R}$ diskretna slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru (S, P) .*

DOKAZ: Vse kar je treba dokazati je, da je slika $Y(S) = g(X(S))$ števna množica. To sledi neposredno iz dejstva, da je $X(S)$ števna množica. □

Včasih se zgodi, da se posamezne vrednosti diskretne slučajne spremenljivke X le malo razlikujejo od “povprečja” $E(X)$. Spet drugič so te razlike večje. Količina, ki meri kako so vrednosti slučajne spremenljivke X razpršene okrog njenega upanja $E(X)$, je zelo pomembna. Imenujemo jo disperzija oziroma varianca.

Definicija. Naj bo X diskretna slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru (S, P) . *Disperzija* oziroma *varianca* spremenljivke X , ki jo označimo z $\text{var}(X)$, je definirana s predpisom

$$\text{var}(X) = E((X - E(X))^2).$$

Standardni odklon $\sigma(X)$ spremenljivke X je definiran kot koren variance, to je $\sigma(X) = \sqrt{\text{var}(X)}$.

Opazimo, da je za diskretno slučajno spremenljivko X po zgornji trditvi 3.5 tudi $(X - E(X))^2$ diskretna slučajna spremenljivka. Varianca in standardni odklon sta torej dobro definirana.

Kaj torej meri disperzija oziroma varianca diskretne slučajne spremenljivke? Lahko torej rečemo, da je to “povprečna vrednost” kvadratov oddaljenosti vrednosti X od njenega “povprečja” oziroma bolj natančno, od njenega matematičnega upanja $E(X)$.

Običajno disperzije ne računamo direktno. A predno si lahko ogledamo, kako si lahko pri njenem izračunu pomagamo, si oglejmo naslednjo trditev in njeno posledico, ki precej olajšata računanje matematičnih upanj “sestavljenih” diskretnih slučajnih spremenljivk.

Trditev 3.6. *Naj bo X diskretna slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru (S, P) in naj bo $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ poljubna funkcija. Tedaj velja*

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(S)} g(x)p_X(x).$$

DOKAZ: Označimo $Y = g(X)$ in vzemimo nek $y \in Y(S)$. Tedaj so seveda dogodki $X^{-1}(x)$, $x \in g^{-1}(y) \cap X(S)$ paroma disjunktni, njihova unija pa je ravno dogodek $Y^{-1}(y)$. Ker je $X(S)$ števna množica, gre tu vsekakor za števno družino paroma disjunktnih dogodkov, torej po 3. aksiomu verjetnosti velja

$$P(Y^{-1}(y)) = \sum_{x \in g^{-1}(y) \cap X(S)} P(X^{-1}(x)),$$

to je,

$$p_Y(y) = \sum_{x \in g^{-1}(y) \cap X(S)} p_X(x) = \sum_{x \in X(S), g(x)=y} p_X(x).$$

Tako je

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y \in Y(S)} (y \cdot p_Y(y)) \\ &= \sum_{y \in Y(S)} \left(y \cdot \sum_{x \in X(S), g(x)=y} p_X(x) \right) \\ &= \sum_{y \in Y(S)} \sum_{x \in X(S), g(x)=y} (y \cdot p_X(x)) \\ &= \sum_{x \in X(S)} (g(x) \cdot p_X(x)), \end{aligned}$$

pri čemer smo pri zadnjem enačaju upoštevali dejstvo, da je g funkcija, kar pomeni, da ima vsak $x \in X(S)$ le eno sliko $y \in Y(S) = g(X(S))$. \square

Oglejmo si sedaj konkreten zgled.

ZGLED: Za ilustracijo izračunajmo disperzijo diskretne slučajne spremenljivke X , ki šteje število pik, ki pade pri metu poštene kocke. Na začetku tega razdelka smo v resnici že izračunali, da je $E(X) = \frac{7}{2}$. Po zgornji definiciji je torej varianca $var(X)$ enaka

$$\frac{1}{6} \left(\left(\frac{-5}{2} \right)^2 + \left(\frac{-3}{2} \right)^2 + \left(\frac{-1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{3}{2} \right)^2 + \left(\frac{5}{2} \right)^2 \right) = \frac{35}{12}.$$

▲

Če je g konstantna funkcija, recimo $g \equiv a$, za nek $a \in \mathbb{R}$, je torej po trditivi 3.1 $E(g(X)) = E(a) = a \sum_{x \in X(S)} p_X(x) = a$. Tudi naslednja posledica zgornje trditve, da je matematično upanje "linearna funkcija", je precej uporabna.

Posledica 3.7. *Naj bo X diskretna slučajna spremenljivka, naj bosta $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ poljubni funkciji in naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$. Tedaj velja*

$$E(a \cdot f(X) + b \cdot g(X)) = a \cdot E(f(X)) + b \cdot E(g(X)).$$

DOKAZ: Definirajmo funkcijo $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $h(x) = af(x) + bg(x)$. Računamo torej upanje $E(a \cdot f(X) + b \cdot g(X)) = E(h(X))$. Po trditvi 3.6 je

$$\begin{aligned} E(h(X)) &= \sum_{x \in X(S)} (h(x)p_X(x)) \\ &= \sum_{x \in X(S)} ((af(x) + bg(x))p_X(x)) \\ &= a \sum_{x \in X(S)} (f(x)p_X(x)) + b \sum_{x \in X(S)} (g(x)p_X(x)) \\ &= aE(f(X)) + bE(g(X)), \end{aligned}$$

kot smo trdili. \square

Zgornja posledica torej med drugim pove, da za diskretno slučajno spremenljivko X in poljubni konstanti $a, b \in \mathbb{R}$ velja $E(aX + b) = aE(X) + b$. Ta enakost je na primer uporabna pri spremembi enot (na primer, iz stopinj Fahrenheita v stopinje Celzija).

Posledica 3.8. *Naj bo X diskretna slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru (S, P) . Tedaj velja $var(X) = E(X^2) - E(X)^2$.*

DOKAZ: Po definiciji je $\text{var}(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2)$, torej je po zgornjem komentarju in posledici 3.7

$$\text{var}(X) = E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + E(X)^2 \cdot E(1) = E(X^2) - E(X)^2,$$

kot smo trdili. \square

ZGLED: Z varianco diskretne slučajne spremenljivke X z enakomerno porazdelitvijo $X \sim U(n; a, b)$ je nekaj dela. Vemo že, da je upanje $E(X) = \frac{a+b}{2}$. Izračunajmo $E(X^2)$. Če označimo $x = \frac{b-a}{n-1}$, dobimo

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n} (a + ix)^2 \right) =$$

$$\frac{1}{n} (na^2 + ax(0 + 2 + 4 + \dots + 2(n-1)) + x^2(0^2 + 1^2 + \dots + (n-1)^2)).$$

Upoštevamo, da je $2+4+6+\dots+2(n-1) = (n-1)n$ in $1^2+2^2+\dots+(n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$, pa dobimo $E(X^2) = a^2 + ax(n-1) + x^2 \frac{(n-1)(2n-1)}{6}$. Vstavimo še $x = \frac{b-a}{n-1}$, pa imamo $E(X^2) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} + \frac{(b-a)^2}{6(n-1)}$. Po krajšem računu tako dobimo, da je $\text{var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{(b-a)^2(n+1)}{12(n-1)}$. \blacktriangle

ZGLED: Izračunajmo sedaj disperzijo diskretne slučajne spremenljivke X z Bernoullijevo porazdelitvijo $X \sim \text{Ber}(p)$. V tem primeru je $E(X^2) = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p$, torej je $\text{var}(X) = p - p^2 = p(1-p) = pq$. \blacktriangle

ZGLED: Naj bo $X \sim \text{Bin}(n, p)$ binomsko porazdeljena diskretna slučajna spremenljivka. Njeno varianco izračunamo na podoben način kot njeno upanje. Kot v zgornjem zgledu, kjer smo računali upanje $E(X)$, vzamemo funkcijo $h(x) = (x+q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k q^{n-k}$, kjer je $q = 1-p$. Tokrat funkcijo h dvakrat odvajamo. Po eni strani dobimo $h''(x) = n(n-1)(x+q)^{n-2}$, po drugi strani pa $h''(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k(k-1)x^{k-2}q^{n-k}$. Tako dobimo, da je $p^2 h''(p) = E(X(X-1))$, torej je $E(X(X-1)) = p^2 n(n-1)$. Sledi $\text{var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p^2 n(n-1) + np - n^2 p^2 = np - np^2 = npq$. \blacktriangle

ZGLED: Tudi disperzijo geometrijsko porazdeljene diskretne slučajne spremenljivke ali diskretne slučajne spremenljivke z negativno binomsko porazdelitvijo izračunamo z dvakratnim odvajanjem primerne funkcije (ki smo jo uporabili že pri izračunu matematičnega upanja). Za $X \sim \text{Geo}(p)$ dobimo $\text{var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$, za $X \sim \text{NBin}(r, p)$ pa $\text{var}(X) = \frac{(1-p)r}{p^2}$. Podrobnosti prepuščamo bralcu. \blacktriangle

ZGLED: Tudi disperzijo diskretne slučajne spremenljivke X s Poissonovo porazdelitvijo $X \sim Poiss(\lambda)$ je lahko izračunati. Podoben račun kot pri računanju matematičnega upanja $E(X)$ namreč pokaže, da je

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (k(k-1) \cdot \frac{\lambda^k}{k!}) \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} e^\lambda = \lambda^2. \end{aligned}$$

Po posledici 3.7 velja $E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X)$, torej je $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$. Sledi $var(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$. ▲

Zgoraj smo omenili, da posledica 3.7 implicira, da za poljubno diskretno slučajno spremenljivko X in poljubni konstanti $a, b \in \mathbb{R}$ velja $E(aX + b) = aE(X) + b$. Od tod potem takoj dobimo še naslednjo posledico, ki pove kako je z varianco $var(aX + b)$.

Posledica 3.9. *Naj bo X diskretna slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru (S, P) in naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$ konstanti. Tedaj velja*

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad \text{in} \quad var(aX + b) = a^2 var(X).$$

DOKAZ: Po definiciji je $var(aX + b) = E((aX + b - E(aX + b))^2)$, torej po zgornjem velja $var(aX + b) = E((aX - aE(X))^2) = E(a^2(X - E(X))^2)$. Po ponovni uporabi posledice 3.7 tako res dobimo $var(aX + b) = a^2 E((X - E(X))^2) = a^2 var(X)$. □

ZGLED: Denimo, da igramo igro, pri kateri vržemo pošteno kocko, potem pa dobimo (oziroma izgubimo) $2X - 10$ evrov, kjer je X število pik na kocki. Izračunajmo matematično upanje in varianco "dobička". Če torej označimo $Y = 2X - 10$, kjer je X diskretna slučajna spremenljivka, ki meri število pik, je po zgornji posledici $E(Y) = 2E(X) - 10$ in $var(Y) = 4var(X)$. Ker je $X \sim U(6; 1, 6)$, je $E(X) = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}$ in $var(X) = \frac{7}{5} \cdot \frac{5^2}{12} = \frac{35}{12}$. Potemtakem je $E(Y) = 2 \cdot \frac{7}{2} - 10 = -3$ in $var(Y) = 4 \cdot \frac{35}{12} = \frac{35}{3}$. ▲

Naloga 3.8. Denimo, da je X diskretna slučajna spremenljivka s sliko $X(S) = \{-1, 2, 5\}$, pri čemer je $p_X(-1) = 1/5$ in $p_X(2) = 2/5$. Ali je s tem spremenljivka X natanko podana? Izračunajte njeno matematično upanje ter njeno varianco. Ali obstajata realni konstanti a in b , da bo za $Y = aX + b$ veljalo $E(Y) = var(Y) = 1$?

Naloga 3.9. Naj bo $X \sim U(11; 0, 10)$ in $Y \sim Bin(10; 1/2)$. Določite matematični upanji in varianci za obe slučajni spremenljivki. Katera izmed teh dveh slučajnih spremenljivk ima večjo varianco? Ali je moč to razložiti na intuitivni ravni?

Naloga 3.10. Dokažite, da za $X \sim Geo(p)$ zares velja $var(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Naloga 3.11. Dokažite, da za $X \sim NBin(r, p)$ zares velja $var(X) = \frac{(1-p)r}{p^2}$.

Poglavje 4

Zvezne slučajne spremenljivke

V prejšnjem poglavju smo se posvetili slučajnim spremenljivkam, katerih zaloga vrednosti je bila števna množica. Videli smo, da je bila v tem primeru porazdelitvena funkcija odsekoma konstantna funkcija, katere edini skoki so bili v točkah slike slučajne spremenljivke. Če malce poenostavimo, lahko rečemo, da se bomo v tem poglavju posvetili slučajnim spremenljivkam, pri katerih se porazdelitvena funkcija spreminja zvezno.

4.1 Zvezne slučajne spremenljivke, porazdelitvena funkcija in gostota

Denimo, da opazujemo metalca kopja. Pri tem nas recimo zanima kako daleč vrže kopje. Označimo to razdaljo z X . Če se dogovorimo, da bomo razdaljo vedno izmerili le do decimetra natančno, potem gre seveda za diskretno slučajno spremenljivko. Glede na to, da profesionalni metalci kopja kopje običajno vržejo nekje med 60 in 100 metri daleč (trenutni svetovni rekord je 98,48 metra, ki ga je leta 1996 postavil Jan Železný), bi imela v tem primeru slika $X(S)$ približno 400 elementov. Kot vidimo že iz samega svetovnega rekorda, razdalje pri metu kopja običajno merijo bolj natančno in sicer na centimeter natančno. Če tako izmerjeno razdaljo označimo z Y , bi imela torej slika $Y(S)$ približno 4000 elementov. Kako pa bi se pri tem porazdelile verjetnosti? Verjetnost $p_X(80, 3)$ bi se morala potemtakem nekako porazdeliti med verjetnosti $p_Y(80, 26), p_Y(80, 27), \dots, p_Y(80, 35)$. Morda pa bi želeli razdaljo meriti na milimeter natančno. V tem primeru bi se morala na primer verjetnost $p_Y(80, 27)$ zopet porazdeliti na deset pripadajočih verjetnosti. Natančnost, na katero merimo razdaljo, lahko načeloma povečujemo še naprej. Zato je smiselno reči, da za možne vrednosti slučajne spremenljivke, ki meri razdaljo, vzamemo kar vsa realna števila (ali vsaj vsa pozitivna re-

alna števila). Seveda pa v tem primeru ne moremo več govoriti o verjetnosti, da je vrednost pripadajoče slučajne spremenljivke enaka neki dani vrednosti, recimo 80 metrov. Kot smo namreč že omenili, se pri takšnem “drobljenju” slike slučajne spremenljivke verjetnost neke konkretne vrednosti ustrezno porazdeli med “nove” možne vrednosti v njeni okolici. Sedaj, ko smo za sliko izbrali kar celotno realno os, smo sliko razdrobili na nešteto mnogo točk, zato se zdi, da mora biti verjetnost posamezne vrednosti enaka 0. Govorimo lahko le o verjetnosti, da bo vrednost slučajne spremenljivke v okolici neke vrednosti.

Preidimo sedaj k formalni definiciji zvezne slučajne spremenljivke. Predno jo podamo, se spomnimo, da je porazdelitvena funkcija $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ (poljubne) slučajne spremenljivke X definirana s predpisom

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X^{-1}((-\infty, x])) = P(\{s \in S : X(s) \leq x\}).$$

Definicija. Naj bo X slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru (S, P) . Tedaj je X zvezna slučajna spremenljivka, če obstaja nenegativna realna funkcija $f_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tako da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du,$$

kjer je F_X porazdelitvena funkcija spremenljivke X . V tem primeru funkciji f_X rečemo (*verjetnostna*) *gostota* slučajne spremenljivke X .

V primeru zvezne slučajne spremenljivke je torej verjetnost, da je njena vrednost največ x , enaka ploščini “neskončnega območja” pod grafom gostote f_X na intervalu $(-\infty, x]$. Zapišimo zgornje razmišljanje, da je torej v primeru zveznih slučajnih spremenljivk verjetnost posamezne konkretne vrednosti enaka 0 kot trditev (za formalen dokaz se je treba malce potruditi, vendar bomo mi podrobnosti izpustili).

Trditev 4.1. Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru (S, P) z gostoto f_X . Tedaj za vsaka $a < b$ velja

$$P(X = a) = 0 \quad \text{in} \quad P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(u) du,$$

kjer je $P(X = a) = P(X^{-1}(a))$ in $P(a \leq X \leq b) = P(X^{-1}([a, b]))$.

Po trditvi 3.4 za (zvezno) slučajno spremenljivko X velja $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$, od koder sledi, da za njeno gostoto f_X velja $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) du = 1$. Podobno

kot smo ugotovili, da je diskretna slučajna spremenljivka natanko določena s svojo verjetnostno funkcijo in da je vsaka funkcija, ki zadošča pogojem verjetnostne funkcije, zares verjetnostna funkcija neke diskretne slučajne spremenljivke, tako je moč dokazati, da je vsaka zvezna slučajna spremenljivka natanko določena s svojo verjetnostno gostoto in obratno, da je vsaka nenegativna funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katero je $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = 1$, verjetnostna gostota neke zvezne slučajne spremenljivke. No, če imamo podano verjetnostno gostoto f_X , imamo s tem očitno podano tudi porazdelitveno funkcijo F_X . A velja tudi obrat. Za gostoto f_X namreč po osnovnem izreku analize velja $f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$, če ta odvod obstaja (kar se recimo v primeru, ko je f_X zvezna funkcija, vedno zgodi).

ZGLED: Oglejmo si funkcijo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, podano s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \vee x > 4 \\ x^2 & ; 0 \leq x \leq 4/3 \\ ax + 1 & ; 4/3 < x \leq 4 \end{cases},$$

kjer je $a \in \mathbb{R}$ neka konstanta. Ali je moč določiti konkretno vrednost te konstante, da bo f verjetnostna gostota neke zvezne slučajne spremenljivke? Po zgornjem mora veljati $f(x) \geq 0$ za vse $x \in \mathbb{R}$ ter $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Glede na definicijo funkcije f dobimo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{4/3} x^2 dx + \int_{4/3}^4 (ax + 1)dx =$$

$$\frac{x^3}{3} \Big|_0^{4/3} + \left(\frac{ax^2}{2} + x \right) \Big|_{4/3}^4 = \frac{64}{81} + \frac{64a}{9} + \frac{8}{3} = \frac{64a}{9} + \frac{280}{81}.$$

Tako se naš pogoj glasi $\frac{64a}{9} + \frac{280}{81} = 1$, to je $\frac{64a}{9} = -\frac{199}{81}$. Sledi $a = -\frac{199}{576}$. Sedaj je treba še preveriti, ali je f zares nenegativna funkcija. Velja na primer $f(4) = 1 - \frac{199}{144} = -\frac{55}{144} < 0$, torej f ni verjetnostna gostota kake zvezne slučajne spremenljivke. Bralca vabimo, da določi konstanti $a, b \in \mathbb{R}$, da bo f zares verjetnostna gostota zvezne slučajne spremenljivke, če f na intervalu $[4/3, 4]$ definiramo kot $f(x) = ax + b$ in dodatno zahtevamo, da je $f(4) = 0$. (Rešitev je $a = -17/288$ in $b = 17/72$.) ▲

ZGLED: Podana je realna funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x < a \\ 1/x^2 & ; x \geq a \end{cases},$$

kjer je $a > 0$ neka realna konstanta. Ali je moč določiti vrednost konstante a , da bo f verjetnostna gostota kake zvezne slučajne spremenljivke?

Z nenegativnostjo funkcije f tokrat ni težav. Ugotoviti je torej treba le, če lahko določimo vrednost konstante a tako, da bo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Dobimo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_a^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_a^{\infty} = \frac{1}{a}.$$

Torej mora veljati $a = 1$. Izračunajmo še pripadajočo porazdelitveno funkcijo. Za $x < 1$ seveda velja $F_X(x) = 0$. Za $x \geq 1$ pa dobimo

$$F_X(x) = \int_1^x \frac{1}{u^2} du = \left(-\frac{1}{u} \right) \Big|_1^x = \frac{x-1}{x}.$$

▲

Za konec tega razdelka omenimo še naslednje. Očitno je, da diskretne slučajne spremenljivke ne premorejo gostote, da torej niso zvezne. Obratno, zvezne slučajne spremenljivke ne premorejo verjetnostne funkcije in zato niso diskretne. Kljub temu pa imajo tako ene kot druge porazdelitveno funkcijo. Bistvena razlika pri tej funkciji je ta, da se pri diskretni slučajni spremenljivki porazdelitvena funkcija spreminja skokoma, torej nezvezno, medtem ko se pri zvezni slučajni spremenljivki spreminja zvezno. Zato tudi takšni poimenovanji.

Naloga 4.1. Denimo, da je X zvezna slučajna spremenljivka, katere porazdelitvena funkcija F_X je podana s predpisom

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ x^3 & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & ; x > 1 \end{cases} .$$

Izračunajte tedaj verjetnost $P(1/3 \leq X \leq 2/3)$. Določite tudi verjetnostno gostoto slučajne spremenljivke X .

Naloga 4.2. Podana je realna funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2 & ; -4 \leq x \leq -3 \\ 1/4 & ; -1 \leq x \leq 1 \\ 2 - ax & ; 3 \leq x \leq 4 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} ,$$

kjer je $a \in \mathbb{R}$ neka konstanta. Določite konkretno vrednost konstante a , da bo f verjetnostna gostota neke zvezne slučajne spremenljivke in nato izračunajte njeno porazdelitveno funkcijo.

Naloga 4.3. Denimo, da študent na izpitu dobi oceno med 0 in 1, pri čemer lahko njegovo oceno predstavimo kot zvezno slučajno spremenljivko X z verjetnostno gostoto

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x + 1 & ; 0 \leq x \leq 1/2 \\ ax^2 + 1 & ; 1/2 < x \leq 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

Določite vrednost konstante a . Če študent izpit opravi le v primeru, da zbere vsaj 55 procentov, kolikšna je tedaj verjetnost, da bo opravil izpit?

4.2 Primeri zveznih slučajnih spremenljivk

Ogljemo si nekaj najpomembnejših zveznih slučajnih spremenljivk. Le-te so nepogrešljiva sestavina statistike, zato si jih velja dobro zapomniti.

- **ENAKOMERNA PORAZDELITEV:** Pravimo, da ima slučajna spremenljivka X *enakomerno porazdelitev* s parametroma a in b , kjer je $a < b$, (oznaka $X \sim U(a, b)$), če je njena gostota podana s predpisom

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & ; a \leq x \leq b \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

Seveda je f_X nenegativna funkcija, poleg tega pa velja $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) du = 1$, torej je f_X res gostota neke zvezne slučajne spremenljivke. Bralec se bo prepričal, da je v tem primeru porazdelitvena funkcija F_X podana s predpisom

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & ; a < x < b \\ 1 & ; x \geq b \end{cases}$$

- **EKSPONENTNA PORAZDELITEV:** Pravimo, da ima slučajna spremenljivka X *eksponentno porazdelitev* s parametrom $\lambda > 0$ (oznaka $X \sim Exp(\lambda)$), če je njena gostota podana s predpisom

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & ; x > 0 \end{cases}$$

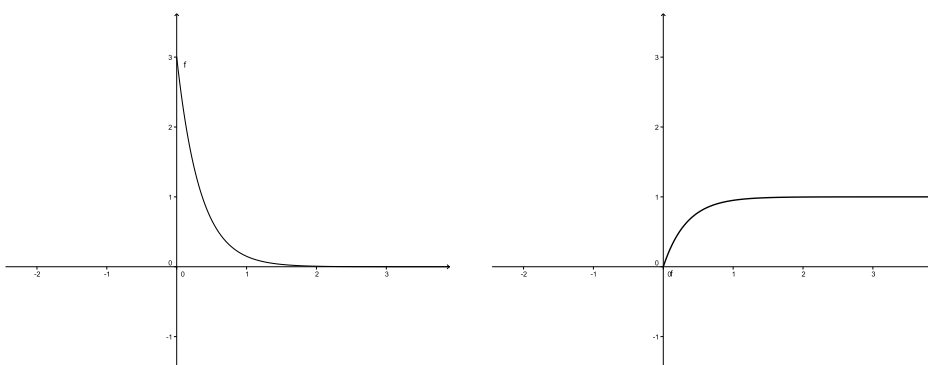
Izračunajmo tedaj porazdelitveno funkcijo F_X . Ker je $(e^{-\lambda x})' = -\lambda e^{-\lambda x}$, je $\int e^{-\lambda u} du = \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda u} + c$. Ker je $f_X \equiv 0$ na intervalu $(-\infty, 0)$, je $F_X(x) = 0$ za $x \leq 0$ in

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du = \lambda \int_0^x e^{-\lambda u} du = -e^{-\lambda u} \Big|_0^x = -e^{-\lambda x} + 1,$$

torej je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & ; x > 0. \end{cases}$$

Na sliki 4.1 je prikazan graf gostote spremenljivke $X \sim \text{Exp}(3)$ in graf pripadajoče porazdelitvene funkcije.



Slika 4.1: Gostota in pripadajoča porazdelitvena funkcija za slučajno spremenljivko $X \sim \text{Exp}(3)$.

- **NORMALNA PORAZDELITEV:** Pravimo, da ima slučajna spremenljivka X *normalno porazdelitev* s parametroma μ in $\sigma^2 > 0$ (oznaka $X \sim N(\mu, \sigma^2)$), če je njena gostota podana s predpisom

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

za poljuben $x \in \mathbb{R}$. Prepričajmo se, da je to res gostota neke zvezne slučajne spremenljivke. To pokažemo tako, da se prepričamo, da velja $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) du = 1$. Računajmo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy,$$

kjer smo uvedli novo spremenljivko $y = \frac{u-\mu}{\sigma}$. Torej bo $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)du = 1$ natanko tedaj, ko bo $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \sqrt{2\pi}$, kar se zaradi pozitivnosti eksponentne funkcije zgodi natanko tedaj, ko velja

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \right)^2 = 2\pi.$$

Velja

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y^2+z^2)} dydz.$$

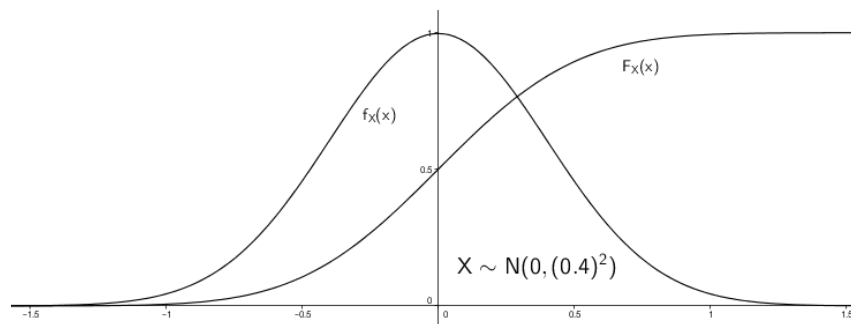
Če vpeljimo polarne koordinate $y = r \cos \varphi$ in $z = r \sin \varphi$, je pripadajoča Jacobijeva determinanta enaka r . Opazimo še, da so meje za r od 0 do ∞ , za φ pa od 0 do 2π , pa je

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

Pri tem smo nedoločen integral $\int e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr$ izračunali s pomočjo substitucije $t = -\frac{1}{2}r^2$. Dobimo $dt = -r dr$, torej je $\int e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr = -e^{-\frac{1}{2}r^2} + c$ in tako je

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - e^{-\frac{1}{2}N^2} \right) = 1.$$

Skratka, f_X je res gostota neke zvezne slučajne spremenljivke. Na sliki 4.2 sta prikazani gostota in porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke $X \sim N(0, (0.4)^2)$ (porazdelitvene funkcije se z elementarnimi funkcijami ne da izraziti).



Slika 4.2: Gostota in porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke s porazdelitvijo $X \sim N(0, (0.4)^2)$.

- **PARETOVA PORAZDELITEV:** Pravimo, da ima slučajna spremenljivka X *Paretovo porazdelitev* s parametrom $\alpha > 0$ (oznaka $X \sim \text{Par}(\alpha)$), če je njena gostota podana s predpisom

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 1 \\ \frac{\alpha}{x^{1+\alpha}} & ; x \geq 1. \end{cases}$$

Prepričajmo se, da je s tem zares podana gostota neke slučajne spremenljivke. Ker je $\alpha > 0$, je funkcija f_X očitno nenegativna. Prepričati se je torej le treba, da velja $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$. V to se brez težav prepričamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{\alpha}{x^{1+\alpha}}dx = \left(\frac{-1}{x^\alpha} \right) \Big|_1^{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{N^\alpha} \right) = 1.$$

Izračunajmo še porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke X . Po zgornjem računu dobimo

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^\alpha} & ; x \geq 1. \end{cases}$$

Naloga 4.4. Naj bo $X \sim \text{Exp}(3)$. Izračunajte verjetnost $P(1 \leq X \leq 3)$ ter verjetnost $P(X > 3)$.

Naloga 4.5. Naj bo $X \sim \text{Par}(2)$. Ali obstaja realno število r , da je verjetnost $P(3 \leq X \leq r)$ enaka 0,1?

4.3 Matematično upanje zveznih slučajnih spremenljivk

V poglavju o diskretnih slučajnih spremenljivkah smo matematično upanje definirali kot vsoto $E(X) = \sum_{x \in X(S)} x \cdot p_X(x)$. Pri zveznih slučajnih spremenljivkah vsoto zamenja integral, verjetnostno funkcijo pa verjetnostna gostota.

Definicija. Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru (S, P) in naj bo f_X njena gostota. *Matematično upanje* spremenljivke X je tedaj definirano kot

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} u f_X(u) du,$$

če ta integral obstaja.

Ker je $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)du = 1$, lahko torej rečemo, da $E(X)$ predstavlja neke vrste težišče lika, ki ga opiše x -os in graf gostote f_X .

Za zgled izračunajmo upanja za enakomerno, eksponentno, normalno in Paretovo porazdelitev.

ZGLED: Naj bo $X \sim U(a, b)$, kjer je $a < b$. Tedaj je $f_X(u) = \frac{1}{b-a}$ za $a < u < b$, torej je

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} u f_X(u) du = \int_a^b \frac{u}{b-a} du = \frac{u^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

▲

ZGLED: Naj bo $X \sim Exp(\lambda)$. Tedaj z integracijo po delih hitro dobimo

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} u f_X(u) du = \int_0^{\infty} \lambda u e^{-\lambda u} du = \frac{1}{\lambda}.$$

▲

ZGLED: Naj bo $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Tedaj je

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du = \mu + \int_{-\infty}^{\infty} (u-\mu) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du$$

V integral $\int_{-\infty}^{\infty} (u-\mu) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du$ uvedemo spremenljivko $t = u - \mu$, pa dobimo $\int_{-\infty}^{\infty} t \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2} dt$. Ker je integrand liha funkcija, je rezultat seveda enak 0. Tako je matematično upanje normalno porazdeljene slučajne spremenljivke s parametroma μ in σ^2 enako μ . ▲

ZGLED: Naj bo $X \sim Par(\alpha)$, kjer je $\alpha > 0$. Računamo torej integral

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} u f_X(u) du = \int_1^{\infty} \frac{\alpha}{u^\alpha} du.$$

V primeru, da je $\alpha = 1$, dobimo $E(X) = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln(t) = \infty$. Denimo sedaj, da je $\alpha \neq 1$. Tedaj je

$$E(X) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \lim_{t \rightarrow \infty} (t^{1-\alpha} - 1).$$

Vrednost te limite je odvisna od tega ali je $\alpha < 1$ ali $\alpha > 1$. Tako je

$$E(X) = \begin{cases} \infty & ; \alpha \leq 1 \\ \frac{\alpha}{\alpha-1} & ; \alpha > 1 \end{cases}$$



Spomnimo se, da za diskretne slučajne spremenljivke velja, da jih lahko komponiramo s poljubnimi realnimi funkcijami (seveda na levi), pa ponovno dobimo diskretno slučajno spremenljivko. Pri zveznih slučajnih spremenljivkah je situacija malce bolj delikatna, saj obstoj ustrezne gostote za kompozitum ni povsem jasen. Izkaže pa se, da v primeru, ko je funkcija, s katero komponiramo, dovolj lepa (recimo zvezna, ali monotona, itd.) s tem ni težav. Zato bomo odslej malce površno kar privzeli, da bodo realne funkcije, s katerimi bomo komponirali, “dovolj lepe”, torej takšne, da bo kompozitum zopet slučajna spremenljivka. Podobno kot smo pokazali, da lahko matematično upanje takih diskretnih slučajnih spremenljivk izračunamo direktno (ne da bi bilo treba računati pripadajočo verjetnostno funkcijo “nove slučajne spremenljivke”), velja tudi za zvezne slučajne spremenljivke podoben izrek, ki pove, da lahko upanje “nove slučajne spremenljivke” izračunamo brez da bi poznali njeno gostoto. Dokaz tega izreka je malce zahtevnejši od pripadajočega analoga za diskretne slučajne spremenljivke, zato ga zaradi časovne omejitve ne bomo navajali.

Izrek 4.2. *Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka in naj bo f_X njena gostota. Tedaj za poljubno realno funkcijo $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katero je $g \circ X$ zvezna slučajna spremenljivka, velja*

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) f_X(u) du.$$

ZGLED: Denimo, da v neki tovarni izdelujejo kvadratne lesene plošče. Vsaka plošča ima dolžino roba med 0 in 2 metroma. Naj bo X slučajna spremenljivka, ki meri dolžino roba in denimo, da je X enakomerno porazdeležna na intervalu $(0, 2)$, to je $X \sim U(0, 2)$. Zanima nas, kakšna je pričakovana ploščina plošč.

Po zgornjem je $E(X) = \frac{2}{2} = 1$, torej bi intuitivno pričakovali, da bo pričakovana ploščina 1 kvadratni meter. Pa napravimo izračun. Tokrat nas seveda zanima slučajna spremenljivka $Y = X^2 = g(X)$, kjer je $g(x) = x^2$. Po zgornjem izreku je

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 f_X(u) du = \int_0^2 \frac{u^2}{2} du = \frac{u^3}{6} \Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Vidimo torej, da nas intuicija zavede. Ta primer tako pokaže, da v splošnem enakost $E(g(X)) = g(E(X))$ ne velja. ▲

Omeniti velja tako imenovano Jensenovo neenakost, ki pravi, da za konveksne funkcije g velja $g(E(X)) \leq E(g(X))$. Ker je $x \mapsto x^2$ konveksna

funkcija, torej velja $(E(X))^2 \leq E(X^2)$, kar se je izkazalo tudi v našem zgornjem primeru.

Disperzijo oziroma varianco definiramo povsem analogno kot v poglavju o diskretnih slučajnih spremenljivkah, to je, $var(X) = E((X - E(X))^2)$.

Če je funkcija $g(x)$ linearna, se upanje in varianca slučajne spremenljivke $g(X)$ zelo lepo izražata z upanjem in varianco slučajne spremenljivke X .

Trditev 4.3. *Naj bo X diskretna ali zvezna slučajna spremenljivka in naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$ poljubni konstanti. Tedaj velja*

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad \text{in} \quad var(aX + b) = a^2 var(X).$$

DOKAZ: Da ta trditev velja za diskretne slučajne spremenljivke, smo pokazali že v posledici 3.9. Denimo torej, da je X zvezna slučajna spremenljivka z gostoto f_X . Tedaj po izreku 4.2 velja

$$E(aX + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (au + b) f_X(u) du = a \int_{-\infty}^{\infty} u f_X(u) du + b \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) du = aE(X) + b,$$

saj je $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) du = 1$. Enakost za varianco sedaj takoj sledi, dokaz pa je povsem identičen tistemu iz dokaza posledice 3.9. \square

Kot v poglavju o diskretnih slučajnih spremenljivkah lahko tudi za zvezne iz zgornje trditve takoj izpeljemo naslednjo posledico.

Posledica 4.4. *Naj bo X slučajna spremenljivka. Tedaj velja*

$$var(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Oglejmo si kako varianco izračunamo za najbolj znane zvezne slučajne spremenljivke.

ZGLED: Zlahka se prepričamo, da za $X \sim U(a, b)$, kjer je $a < b$, velja

$$var(X) = \int_a^b \frac{u^2}{b-a} du - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{4(a^2 + ab + b^2) - 3(a+b)^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

▲

ZGLED: Naj bo $X \sim Exp(\lambda)$, kjer je $\lambda > 0$. Tedaj se z dvakratno uporabo pravila integracije po delih hitro prepričamo, da velja $E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$, torej je po zgornjem izreku

$$var(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} = (E(X))^2.$$



ZGLED: Naj bo $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Tokrat je varianco boljše izračunati kar direktno po definiciji. Ker sedaj že vemo, da je $E(X) = \mu$, namreč dobimo,

$$\text{var}(X) = E((X - E(X))^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(u - \mu)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du,$$

torej je $\text{var}(X) = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$. Z integriranjem po delih dobimo

$$\int t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = -te^{-\frac{1}{2}t^2} + \int e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Ker je $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$ ravno gostota slučajne spremenljivke z normalno porazdelitvijo $N(0, 1)$, je $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = 1$, torej je zaradi $\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-\frac{1}{2}t^2} = 0$

$$\text{var}(X) = \sigma^2.$$

Slučajna spremenljivka z normalno porazdelitvijo $N(\mu, \sigma^2)$ ima torej matematično upanje ravno enako μ , varianco pa ravno σ^2 . ▲

ZGLED: Tudi varianco za $X \sim \text{Par}(\alpha)$ zlahka izračunamo. Seveda je kaj takega smiselno le za $\alpha > 1$, saj ima v nasprotnem primeru X neskončno matematično upanje. V primeru, da je torej $\alpha > 1$, dobimo

$$E(X^2) = \int_1^{\infty} u^2 \frac{\alpha}{u^{1+\alpha}} du = \int_1^{\infty} \alpha u^{1-\alpha} du.$$

Povsem podobno kot pri izračunu matematičnega upanja za X tako dobimo

$$E(X^2) = \begin{cases} \infty & ; \alpha \leq 2 \\ \frac{\alpha}{\alpha-2} & ; \alpha > 2. \end{cases}$$

Tako je za $\alpha > 1$

$$\text{var}(X) = \begin{cases} \infty & ; \alpha \leq 2 \\ \frac{\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} & ; \alpha > 2. \end{cases}$$



Zgornja trditev in posledica sta torej v precejšnji pomoč, ko želimo izračunati upanje ali varianco slučajne spremenljivke $g(X)$. Kako pa je s porazdelitvijo slučajne spremenljivke $g(X)$? Kako se izraža s porazdelitvijo slučajne spremenljivke X ? Izkaže se, da se v splošnem verjetnostna gostota spremenljivke $g(X)$ ne izraža preveč lepo z gostoto f_X . No, če je $g(X) = aX + b$, kjer je $a > 0$, je stvar bolj preprosta.

Trditev 4.5. Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka z gostoto f_X . Tedaj za poljubna $a, b \in \mathbb{R}$, kjer je $a > 0$, velja

$$F_{aX+b}(x) = F_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad \text{in} \quad f_{aX+b}(x) = \frac{1}{a}f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

za vse $x \in \mathbb{R}$.

DOKAZ: Ker je

$$F_{aX+b}(x) = P(aX + b \leq x) = P(aX \leq x - b) = P\left(X \leq \frac{x-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

in je $f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$, je dokaz na dlani. \square

ZGLED: Naj bo $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ in naj bo $a = \frac{1}{\sigma}$ in $b = -\frac{\mu}{\sigma}$. Tedaj je $\frac{x-b}{a} - \mu = \frac{x+\frac{\mu}{\sigma}}{\frac{1}{\sigma}} - \mu = \sigma x$, torej je po zgornji trditvi

$$f_{aX+b}(x) = \frac{1}{a}f_X\left(\frac{x-b}{a}\right) = \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma x}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

kar je ravno gostota standardno normalno porazdeljene slučajne spremenljivke. Če torej z Y označimo zvezno slučajno spremenljivko s standardno normalno porazdelitvijo, je $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$, torej je $X = \sigma Y + \mu$ in tako dobimo, da je $P(X \leq x) = F_X(x) = F_Y\left(\frac{Y-\mu}{\sigma}\right)$. Tako se vsaka verjetnost za X izraža z porazdelitveno funkcijo standardne normalne slučajne spremenljivke. Dovolj je torej imeti tabelirane vrednosti za $Y \sim N(0, 1)$. \blacktriangle

Naloga 4.6. Naj bo $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, kjer je $\lambda > 0$. Prepričajte se, da res velja $E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$.

Naloga 4.7. Naj bo $X \sim U(a, b)$, kjer sta $a < b$ poljubni realni števili in naj bosta $s, t \in \mathbb{R}$ taki konstanti, da je $s > 0$. Označimo $Y = sX + t$. Določite tedaj gostoto slučajne spremenljivke Y . Ali ima Y tudi enakomerno porazdelitev? Če je odgovor da, s kakšnimi parametri?

Naloga 4.8. Naj bo $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ za $\lambda > 0$ in naj bosta a, b poljubni realni števili, pri čemer je $a > 0$. Označimo $Y = aX + b$. Določite tedaj gostoto slučajne spremenljivke Y . Ali ima Y tudi eksponentno porazdelitev? Če je odgovor v splošnem negativen, kakšna morata biti a in b , da bo to res? Določite v tem primeru $\lambda' > 0$, da bo $Y \sim \text{Exp}(\lambda')$.

Naloga 4.9. Testi inteligenčnega kvocienta (IQ) so običajno narejeni tako, da naj bi rezultate testiranja dobro aproksimirala zvezna slučajna spremenljivka s porazdelitvijo $X \sim N(100, 15^2)$, to je, povprečni IQ naj bi bil 100, standardni odklon pa 15. Izračunajte verjetnost, da je IQ naključno izbranega človeka največ 90. Kolikšna pa je verjetnost, da je IQ naključno izbranega človeka večji od 150? In kolikšna je verjetnost, da je IQ naključno izbranega števila za največ standardni odklon oddaljen od srednje vrednosti, to je, da je IQ med 85 in 115?

4.4 Kvantili in mediana

Denimo, da imamo zvezno slučajno spremenljivko X in da nas zanima najmanjše realno število q , za katerega je $F_X(q) = P(X \leq q) = 0.1$. Povedano drugače, zanima nas najmanjše realno število q , da bo verjetnost, da je vrednost spremenljivke X največ q enaka 0.1. V tem primeru govorimo o 0.1-tem kvantilu, oziroma 10-tem percentilu.

Definicija. Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka in naj bo $0 \leq p \leq 1$. Tedaj je p -ti kvantil oziroma $100p$ -ti percentil porazdelitve X enak najmanjšemu realnemu številu q_p , za katerega je $F_X(q_p) = p$. V posebnem primeru, ko je $p = 0.5$, govorimo o *mediani* porazdelitve X .

ZGLED: Izračunajmo 95-ti percentil eksponentno porazdeljene spremenljivke $X \sim Exp(2)$. Kot vemo, je $F_X(x) = 0$ za $x \leq 0$ in $F_X(x) = 1 - e^{-2x}$ za $x > 0$. Iščemo najmanjše realno število q , za katerega je $F_X(q) = 0.95$, to je, rešujemo enačbo $1 - e^{-2q} = 0.95$. Dobimo $e^{-2q} = 0.05$, oziroma $q = -\frac{1}{2} \ln 0.05 \approx 1.498$. ▲

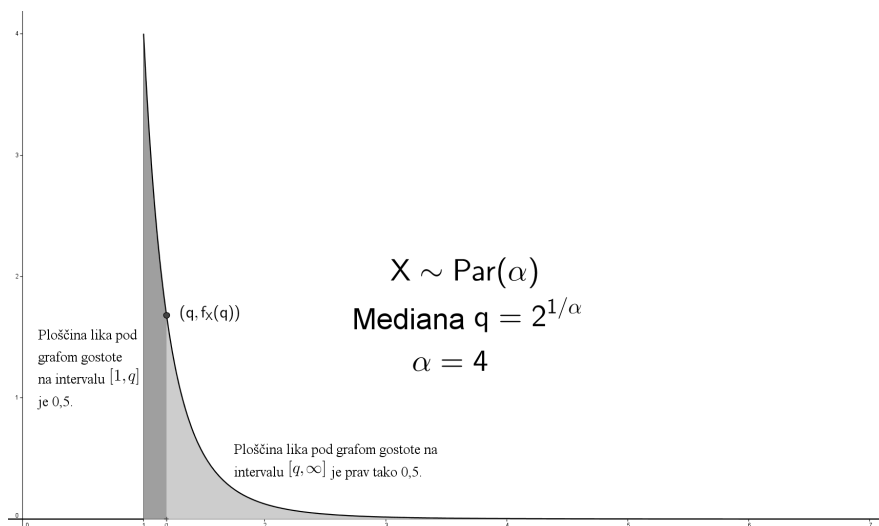
Lahko se je prepričati, da je za enakomerno, pa tudi za normalno porazdeljeno slučajno spremenljivko, mediana kar enaka matematičnemu upanju. No, da temu ni vedno tako, se hitro prepričamo. Pokažimo, da to ne velja za slučajno spremenljivko s Paretovo porazdelitvijo, bralec pa bo pokazal, da podobno velja tudi za eksponentno porazdeljeno slučajno spremenljivko.

ZGLED: Naj bo $X \sim Par(\alpha)$, kjer je $\alpha > 0$. Spomnimo se, da tedaj velja

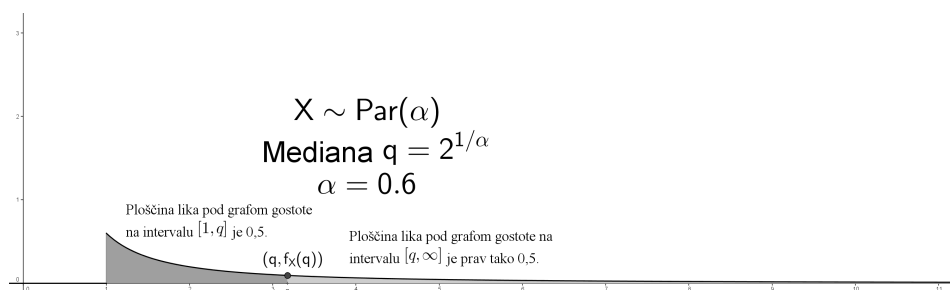
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^\alpha} & ; x \geq 1. \end{cases}$$

Potemtakem za izračun mediane iščemo $q > 1$, za katerega je $1 - \frac{1}{q^\alpha} = 0.5$. Iskano število q je tako $q = 2^{1/\alpha}$. Tako je na primer mediana za $X \sim Par(1)$

enaka številu 2, mediana za $X \sim \text{Par}(2)$ pa $\sqrt{2}$. Vidimo torej, da večje, kot je število α , manjša je mediana. To je prikazano na slikah 4.3 in 4.4. ▲



Slika 4.3: Prikaz mediane za $X \sim \text{Par}(4)$.



Slika 4.4: Prikaz mediane za $X \sim \text{Par}(0.6)$.

Naloga 4.10. Izračunajte mediano za eksponentno porazdeljeno slučajno spremenljivko $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, kjer je $\lambda > 0$.

Naloga 4.11. Denimo, da nek košarkar skuša zadeti koš s redine igrišča in da X meri čas (v minutah), ki je potreben, da prvič zadane koš. Predpostavimo, da ima X eksponentno porazdelitev s parametrom $\lambda = 5$. Določite čas, do katerega bo koš zadel z 90 procentno verjetnostjo.

Naloga 4.12. Naj ima X Paretovo porazdelitev $X \sim \text{Par}(1)$. Izračunajte tedaj mediano slučajne spremenljivke $Y = \frac{1}{2}X - 3$.

Naloga 4.13. Naj bo $X \sim N(5, 2^2)$. Izračunajte (oziroma bolje rečeno odčitajte) tedaj deseti percentil slučajne spremenljivke X .

Poglavje 5

Slučajni vektorji

V prejšnjih dveh poglavjih smo obravnavali posamezne slučajne spremenljivke. Včasih pa nas za nek poskus zanimajo vrednosti večih slučajnih spremenljivk hkrati. Le-te so lahko med seboj na nek način “povezane”, oziroma so odvisne druga od druge, ali pa ne. V takem primeru nas potem lahko zanima tudi kako se dejstvo, da ima ena izmed opazovanih slučajnih spremenljivk neko vrednost, odraža na drugi slučajni spremenljivki. Takšne situacije opisujemo s tako imenovanimi slučajnimi vektorji. Kot v primeru ene same slučajne spremenljivke si bomo tudi te pojme ogledali posebej za diskretne in posebej za zvezne slučajne spremenljivke.

5.1 Slučajni vektorji diskretnih slučajnih spremenljivk

Definirajmo za začetek kar pojem slučajnega vektorja dveh diskretnih slučajnih spremenljivk.

Definicija. Naj bo (S, P) verjetnostni prostor in naj bosta X in Y diskretni slučajni spremenljivki na tem prostoru. Tedaj je (X, Y) *slučajni vektor* slučajnih spremenljivk X in Y , katerega *verjetnostna funkcija* $p_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ je podana s predpisom

$$p_{X,Y}((a, b)) = P(X = a \wedge Y = b) = P(\{s \in S : X(s) = a \wedge Y(s) = b\}).$$

Seveda lahko analogno definiramo tudi slučajni vektor in pripadajočo slučajno funkcijo večih diskretnih slučajnih spremenljivk (seveda na istem verjetnostnem prostoru).

Bralec je zagotovo opazil, da je dogodek $\{s \in S : X(s) = a \wedge Y(s) = b\}$ presek dogodkov $\{s \in S : X(s) = a\}$ in $\{s \in S : Y(s) = b\}$. Če sta torej

pripadajoča dogodka neodvisna, bo veljalo $p_{X,Y}((a,b)) = p_X(a)p_Y(b)$. A o tem nekoliko več kasneje.

ZGLED: Imejmo met dveh poštenih kock in naj bo X slučajna spremenljivka, ki meri vsoto pik na obeh kockah, Y pa slučajna spremenljivka, ki meri maksimum števila pik na obeh kockah. Pripadajoče vrednosti verjetnostne funkcije $p_{X,Y}$ so zbrane v spodnji tabeli, kjer je v vrstici a in stolpcu b podana vrednost $p_{X,Y}((a,b))$.

$a \setminus b$	1	2	3	4	5	6
2	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0
3	0	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0
4	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0
5	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0
6	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0
7	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
8	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
9	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
10	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$
11	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$
12	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

Bralca vabimo, da izračuna vsote vrednosti posamezne vrstice (stolpca) in dobljeno primerja z vrednostmi verjetnostnih funkcij p_X in p_Y . Kar bo ugotovil, seveda ni slučaj. ▲

Povsem analogno kot smo v poglavju o diskretnih slučajnih spremenljivkah pokazali, da za vsak končen (ali kvečjemu števen) nabor nenegativnih vrednosti, katerih vsota je enaka 1, obstaja verjetnostna funkcija neke diskretne slučajne spremenljivke, ki ima ravno te vrednosti, tudi tukaj lahko pokažemo podobno trditev za slučajne vektorje.

Kot poznamo verjetnostno funkcijo slučajnih vektorjev, poznamo tudi porazdelitveno funkcijo slučajnih vektorjev.

Definicija. Naj bosta X in Y poljubni (diskretni) slučajni spremenljivki. Tedaj je porazdelitvena funkcija $F_{X,Y}$ slučajnega vektorja (X,Y) funkcija $F_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0,1]$, podana s predpisom $F_{X,Y}((x,y)) = P(X \leq x \wedge Y \leq y)$.

Porazdelitveni funkciji F_X in F_Y za X in Y je seveda moč dobiti iz porazdelitvene funkcije slučajnega vektorja (X,Y) . Imenujemo ju *robni* porazdelitveni funkciji.

5.2. SLUČAJNI VEKTORJI ZVEZNIH SLUČAJNIH SPREMENLJIVK 73

Trditev 5.1. Naj bo $F_{X,Y}$ porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja (X, Y) . Potem za robno porazdelitveno funkcijo F_X velja $F_X(x) = P(X \leq x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}((x, y))$, za vsak $x \in \mathbb{R}$, za robno porazdelitveno funkcijo F_Y pa velja $F_Y(y) = P(Y \leq y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}((x, y))$, za vsak $y \in \mathbb{R}$. Podobno za robni verjetnostni funkciji p_X in p_Y velja $p_X(a) = \sum_{b \in Y(S)} p_{X,Y}((a, b))$ za vse $a \in X(S)$ ter $p_Y(b) = \sum_{a \in X(S)} p_{X,Y}((a, b))$ za vse $b \in Y(S)$.

Naloga 5.1. Slučajni spremenljivki X in Y , ki sta definirani na istem verjetnostnem prostoru, imata sliki $X(S) = \{0, 1, 2, 3\}$ in $Y(S) = \{0, 2, 4\}$. Za verjetnostno funkcijo $p_{X,Y}$ je znanih nekaj vrednosti, ki so zapisane v spodnji tabeli (zapisane so tudi nekatere vrednosti pripadajočih robnih verjetnostnih funkcij).

$X \backslash Y$	0	2	4	
0	1/10	1/8		21/40
1		1/10		1/5
2	1/20		1/10	
3			1/10	1/8
	1/4		1/2	

Ali je verjetnostna funkcija $p_{X,Y}$ s temi podatki natanko določena? Ali je moč izračunati vrednosti porazdelitvene funkcije $F_{X,Y}((2, 2))$? Ali je moč izračunati verjetnost $P(X = Y)$? Kaj pa $P(X + Y = 5)$?

Naloga 5.2. Petkrat zapored vržemo pošteno kocko, pri čemer so posamezni meti neodvisni med seboj. Naj X meri število pojavitev enice, Y pa število pojavitev katerekoli izmed števil 2 in 4. Določite verjetnostni funkciji p_X in p_Y , nato pa v ustrezno tabelo zapišite tudi vrednosti verjetnostne funkcije slučajnega vektorja (X, Y) . Ali se robne verjetnostne funkcije ujemaajo z vašimi ugotovitvami glede p_X in p_Y ? Izračunajte vrednost $F_{X,Y}((3, 3))$.

5.2 Slučajni vektorji zveznih slučajnih spremenljivk

Spomnimo se, da je za zvezno slučajno spremenljivko X verjetnost, da je njena vrednost med a in b , enaka ploščini pod grafom njene gostote f_X na intervalu $[a, b]$. Podobno bo pri slučajnem vektorju (X, Y) verjetnost, da je par vrednosti vsebovan v nekem pravokotniku enak volumnu pod grafom pripadajoče gostote na tem pravokotniku. Podajmo definicijo.

Definicija. Naj bosta X in Y zvezni slučajni spremenljivki. Tedaj je (X, Y) zvezni slučajni vektor, če obstaja nenegativna funkcija $f_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, za

katero je $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1$, pri tem pa za poljubne $x_1 \leq x_2$ in $y_1 \leq y_2$ velja

$$P(x_1 \leq X \leq x_2 \wedge y_1 \leq Y \leq y_2) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f_{X,Y}(x,y) dx dy.$$

V tem primeru funkcijo $f_{X,Y}$ imenujemo *gostota slučajnega vektorja* (X, Y) .

Kot pri diskretnih slučajnih spremenljivkah lahko tudi tu povsem analogno definiramo slučajne vektorje večih zveznih slučajnih spremenljivk. Spomnimo se tudi kako smo v prejšnjem razdelku definirali porazdelitveno funkcijo slučajnega vektorja. V primeru zveznega slučajnega vektorja z gostoto $f_{X,Y}$ je tako porazdelitvena funkcija $F_{X,Y}$ podana s predpisom

$$F_{X,Y}(a,b) = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b f_{X,Y}(x,y) dx dy.$$

V prejšnjem poglavju smo ugotovili, da je moč za zvezne slučajne spremenljivke gostoto f_X izračunati iz porazdelitvene funkcije F_X , saj velja $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$. No, tudi pri zveznih slučajnih vektorjih ni nič drugače. Tokrat velja

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

Seveda lahko tudi tokrat zlahka izračunamo robne porazdelitvene funkcije in gostote. Velja namreč $F_X(a) = \lim_{b \rightarrow \infty} F_{X,Y}(a,b)$ in $F_Y(b) = \lim_{a \rightarrow \infty} F_{X,Y}(a,b)$. Podobno dobimo še

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy \quad \text{in} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx.$$

Namesto, da bi se spuščali v dokazovanje zgornjih trditev si raje oglejmo konkreten zgled.

ZGLED: Naj bosta X in Y taki zvezni slučajni spremenljivki, da je porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja (X, Y) podana s predpisom

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} - e^{-y} + e^{-(2x+y)} & ; \quad x > 0, y > 0 \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}$$

Prepričamo se lahko, da je funkcija $F_{X,Y}$ zares omejena na interval $[0, 1]$. Izračunajmo robni porazdelitveni funkciji F_X in F_Y . Za $x \leq 0$ ali $y \leq 0$ je seveda $F_X(x) = 0$ in $F_Y(y) = 0$. Sicer pa velja

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = \lim_{y \rightarrow \infty} (1 - e^{-2x} - e^{-y} + e^{-(2x+y)}) = 1 - e^{-2x} \\ F_Y(y) &= \lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x,y) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - e^{-2x} - e^{-y} + e^{-(2x+y)}) = 1 - e^{-y}. \end{aligned}$$

5.2. SLUČAJNI VEKTORJI ZVEZNIH SLUČAJNIH SPREMENLJIVK 75

Izračunajmo sedaj gostoto slučajnega vektorja (X, Y) . Velja $f_{X,Y} = 0$ za $x \leq 0$ ali $y \leq 0$, za $x, y \geq 0$ pa je

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(e^{-y} - e^{-(2x+y)}) = 2e^{-(2x+y)}.$$

Nazadnje izračunajmo še robni gostoti f_X in f_Y . To lahko storimo na dva načina. Lahko izračunamo

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = 2e^{-2x}, \text{ za } x > 0$$

ali pa (za $x > 0$)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \int_0^{\infty} 2e^{-(2x+y)} dy = -(2e^{-(2x+y)}) \Big|_0^{\infty} = 2e^{-2x}.$$

Podobno na poljubnega izmed teh dveh načinov dobimo še $f_Y(y) = e^{-y}$. \blacktriangle

Naloga 5.3. Naj bosta X in Y taki zvezni slučajni spremenljivki na verjetnostnem prostoru (S, P) , da je (X, Y) slučajni vektor z gostoto

$$f_{X,Y}((x, y)) = \begin{cases} \frac{2}{9}(2x^3y + xy^3) & ; \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}$$

Izračunajte porazdelitveno funkcijo slučajnega vektorja (X, Y) in določite robni porazdelitveni funkciji ter robni gostoti. Izračunajte tudi verjetnost $P(1/2 \leq X \leq 1 \wedge 1/2 \leq Y \leq 1)$ in verjetnost $P(X \leq Y)$.

Naloga 5.4. Naj bosta X in Y taki zvezni slučajni spremenljivki na verjetnostnem prostoru (S, P) , da je (X, Y) slučajni vektor z gostoto

$$f_{X,Y}((x, y)) = \begin{cases} x \sin^2(y) \cos(y) & ; \quad 0 \leq x \leq a, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases},$$

kjer je $a > 0$ neka konstanta. Določite konstanto a , nato pa izračunajte porazdelitveno funkcijo slučajnega vektorja (X, Y) ter pripadajoče robne porazdelitvene funkcije in gostote.

Naloga 5.5. Denimo, da lokostrelec strelja v okroglo tarčo radija 1 meter in naj bo X oddaljenost točke, v kateri puščica zadane tarčo, v vodoravni smeri, Y pa v navpični smeri. Pri tem predpostavljamo, da lokostrelec vedno zadane tarčo. Denimo, da sta X in Y taki zvezni slučajni spremenljivki, da za gostoto slučajnega vektorja (X, Y) velja

$$f_{X,Y}((x, y)) = \begin{cases} c & ; \quad x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases},$$

kjer je $c > 0$ ustrezna konstanta. Določite konstanto c , nato pa določite porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

5.3 Neodvisnost slučajnih spremenljivk

Spomnimo se, da smo v razdelku o pogojni verjetnosti definirali pojem neodvisnosti dogodkov in sicer smo rekli, da sta dogodka A in B neodvisna, če velja $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. No, tudi za slučajne spremenljivke bomo zadevo definirali podobno, le da bomo tokrat uporabili pripadajoče porazdelitvene funkcije. Spomnimo se namreč, da za slučajni spremenljivki X in Y na verjetnostnem prostoru (S, P) in $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ velja $P(X \leq a \wedge Y \leq b) = F_{X,Y}(a, b)$ in $P(X \leq a) = F_X(a)$ ter $P(Y \leq b) = F_Y(b)$. Naslednja definicija je tedaj povsem naravna.

Definicija. Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki na verjetnostnem prostoru (S, P) in naj bo $F_{X,Y}$ porazdelitvena funkcija pripadajočega slučajnega vektorja. Tedaj sta X in Y *neodvisni*, če za poljubna $a, b \in \mathbb{R}$ velja

$$F_{X,Y}(a, b) = F_X(a)F_Y(b),$$

to je,

$$P(X \leq a \wedge Y \leq b) = P(X \leq a)P(Y \leq b).$$

Definicija neodvisnosti se seveda na naraven način posploši tudi na več slučajnih spremenljivk.

ZGLED: Slučajni spremenljivki iz zgleda pri diskretnih slučajnih spremenljivkah nista neodvisni, saj na primer velja $F_{X,Y}(4, 2) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, obenem pa je $F_X(4) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ in $F_Y(2) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Po drugi strani sta slučajni spremenljivki iz zgornjega zgleda zveznih slučajnih spremenljivk neodvisni. ▲

Izkaže se, da za diskretne slučajne spremenljivke velja naslednji izrek. A ker je dokaz dokaj tehničen in dolg, ga tu ne bomo navajali.

Izrek 5.2. Naj bosta X in Y diskretni slučajni spremenljivki na verjetnostnem prostoru (S, P) z zalogama vrednosti $X(S) = \{a_1, a_2, \dots\}$ in $Y(S) = \{b_1, b_2, \dots\}$. Tedaj sta X in Y neodvisni natanko tedaj, ko za vsak i in j velja

$$P(X = a_i \wedge Y = b_j) = P(X = a_i)P(Y = b_j).$$

Povedano drugače, zgornji izrek pove, da sta diskretni slučajni spremenljivki X in Y neodvisni natanko tedaj, ko se da verjetnostna funkcija $p_{X,Y}$ faktorizirati kot $p_{X,Y} = p_X p_Y$. V zgornjem zgledu bi se tako lahko

o odvisnosti spremenljivk X in Y prepričali tudi tako, da bi ugotovili, da $p_{X,Y}((2, 1)) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} = p_X(2)p_Y(1)$.

Tudi pri zveznih slučajnih spremenljivkah imamo podobno karakterizacijo neodvisnosti slučajnih spremenljivk.

Izrek 5.3. *Naj bosta X in Y zvezni slučajni spremenljivki na verjetnostnem prostoru (S, P) . Tedaj sta X in Y neodvisni natanko tedaj, ko obstajata realni funkciji g in k , da za vsak par $x, y \in \mathbb{R}$ velja*

$$f_{X,Y}(x, y) = g(x)k(y).$$

DOKAZ: Če sta X in Y neodvisni, za vsak $x, y \in \mathbb{R}$ velja $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$. Če z $f_{X,Y}, f_X, f_Y$ označimo pripadajoče gostote, to pomeni

$$\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u, v) du dv = \int_{-\infty}^x f_X(u) du \cdot \int_{-\infty}^y f_Y(v) dv.$$

Dvakrat parcialno odvajamo, najprej po x , nato po y , pa dobimo

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(f_X(x) \cdot \int_{-\infty}^y f_Y(v) dv \right) = f_X(x) f_Y(y).$$

Pokažimo še obrat. Naj sedaj velja $f_{X,Y}(x, y) = g(x)k(y)$. Najprej se spomnimo, da je $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, v) du dv = 1$. To pomeni, da velja

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(u)k(v) du dv = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du \cdot \int_{-\infty}^{\infty} k(v) dv.$$

Ker je

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u, v) du dv = \int_{-\infty}^x g(u) du \cdot \int_{-\infty}^y k(v) dv,$$

je potemtakem

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du \cdot \int_{-\infty}^{\infty} k(v) dv \cdot \int_{-\infty}^x g(u) du \cdot \int_{-\infty}^y k(v) dv.$$

Opazimo še

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, v) du dv = \int_{-\infty}^x g(u) du \cdot \int_{-\infty}^{\infty} k(v) dv$$

in podobno $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du \cdot \int_{-\infty}^y k(v) dv$, pa sledi $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$. Spremenljivki X in Y sta torej res neodvisni. \square

Med drugim smo torej dokazali, da v primeru, ko sta X in Y neodvisni zvezni slučajni spremenljivki, velja $f_{X,Y} = f_X \cdot f_Y$.

ZGLED: Naj bosta X in Y taki zvezni slučajni spremenljivki, da za njun slučajni vektor (X, Y) velja, da je njegova gostota podana s funkcijo $f_{X,Y}$ s predpisom

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{12}{5}(xy + xy^2) & ; \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ in } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}$$

Ali sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki?

Ker lahko to funkcijo faktoriziramo kot $f_{X,Y}(x, y) = \frac{12}{5}x \cdot y(1 + y)$, sta X in Y po zgornjem izreku neodvisni. \blacktriangle

Naloga 5.6. Za vsako izmed nalog prejšnjega razdelka ugotovite ali sta pripadajoči slučajni spremenljivki neodvisni ali ne.

Naloga 5.7. Naj bo X število cifer pri metu treh uravnoveženih kovancev. Ali obstaja kaka slučajna spremenljivka Y za ta dogodek, ki je neodvisna od X ?

5.4 Matematično upanje funkcij večih slučajnih spremenljivk, kovarianca in korelacija

Imejmo situacijo, ko imamo več slučajnih spremenljivk, recimo X in Y , zanima pa nas neka funkcija teh dveh slučajnih spremenljivk, recimo $g(X, Y) = XY^2$. Kakšna je "pričakovana vrednost" funkcije g ? Če je g dovolj lepa funkcija, je seveda $g(X, Y)$ spet slučajna spremenljivka, torej lahko govorimo o njenem matematičnem upanju. Pa denimo, da govorimo zveznih slučajnih spremenljivkah. Če bi torej želeli izračunati upanje spremenljivke $g(X, Y)$, bi morali najprej poznati njeno gostoto, recimo f_g , saj po definiciji velja $E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} u f_g(u) du$. Na srečo se tudi tokrat izkaže, da lahko v večini primerov upanje izračunamo neposredno, torej brez da bi poznali gostoto "nove" slučajne spremenljivke.

Izrek 5.4. Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki na verjetnostnem prostoru (S, P) in naj bo $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ taka funkcija, da je $Z: S \rightarrow \mathbb{R}$, podana s predpisom $Z(s) = g(X(s), Y(s))$, slučajna spremenljivka. Tedaj velja:

- Če sta X in Y diskretni slučajni spremenljivki z zalogami vrednosti $X(S) = \{a_1, a_2, \dots\}$ in $Y(S) = \{b_1, b_2, \dots\}$, tedaj velja

$$E(Z) = \sum_i \sum_j g(a_i, b_j) p_{X,Y}(a_i, b_j).$$

2. Če sta X in Y zvezni slučajni spremenljivki, velja

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy,$$

kjer je $f_{X,Y}$ gostota slučajnega vektorja (X, Y) .

ZGLED: Denimo da nek obrtnik na Kitajskem izdeluje vaze. Nek model je precej preprost. Je valjaste oblike, s polmerom R in višino H . A ker vaze izdeluje ročno, parametra R in H nista konstanti, pač pa sta slučajni spremenljivki. Zanima nas pričakovani volumen izdelane vaze. Seveda je $V = \pi R^2 H$. Denimo, da je $H \sim U(20, 25)$, da je $R \sim U(5, 7)$ in da sta spremenljivki H in R neodvisni. V tem primeru je seveda $f_H(x) = \frac{1}{5}$ za $20 \leq x \leq 25$ in $f_R(y) = \frac{1}{2}$ za $5 \leq y \leq 7$. Tako je zaradi neodvisnosti $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{10}$ za $20 \leq x \leq 25$ in $5 \leq y \leq 7$. Po zgornjem izreku tako dobimo

$$E(V) = \pi \int_{20}^{25} \int_5^7 \frac{1}{10} r^2 h dr dh = \pi \int_{20}^{25} \left(h \frac{r^3}{30} \Big|_{r=5}^7 \right) = \frac{109\pi}{15} \frac{h^2}{2} \Big|_{20}^{25} = \frac{1635}{2} \pi.$$

▲

Če je funkcija g v zgornjem izreku linearna, dobimo še posebej lep rezultat.

Izrek 5.5. Naj bodo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ poljubna števila, X in Y pa poljubni slučajni spremenljivki na verjetnostnem prostoru (S, P) . Tedaj velja

$$E(\alpha X + \beta Y + \gamma) = \alpha E(X) + \beta E(Y) + \gamma.$$

DOKAZ: Glede na trditev 4.3 lahko brez škode za splošnost privzamemo, da je $\gamma = 0$. Dokažimo izrek za primer, ko sta X in Y diskretni slučajni spremenljivki z zaloga vrednosti $X(S) = \{a_1, a_2, \dots\}$ in $Y(S) = \{b_1, b_2, \dots\}$. Dokaz za zvezni slučajni spremenljivki prepuščamo bralcu. Po zgornjem izreku je

$$\begin{aligned} E(\alpha X + \beta Y) &= \sum_i \sum_j (\alpha a_i + \beta b_j) P(X = a_i \wedge Y = b_j) = \\ &= \sum_i \sum_j \alpha a_i P(X = a_i \wedge Y = b_j) + \sum_i \sum_j \beta b_j P(X = a_i \wedge Y = b_j) = \\ &= \alpha \sum_i a_i \sum_j P(X = a_i \wedge Y = b_j) + \beta \sum_j b_j \sum_i P(X = a_i \wedge Y = b_j) = \\ &= \alpha \sum_i a_i P(X = a_i) + \beta \sum_j b_j P(Y = b_j) = \alpha E(X) + \beta E(Y), \end{aligned}$$

kot smo trdili. □

ZGLED: Spomnimo se, da za diskretno slučajno spremenljivko $X \sim \text{Bin}(n, p)$ velja $E(X) = np$. Bralec se bo spomnil, da smo se morali za ta izračun kar precej potruditi. S pomočjo zgornjega izreka pa je dokaz tega dejstva precej bolj preprost. Slučajna spremenljivka X namreč v tem primeru predstavlja število cifer pri metu n kovancev, pri čemer je verjetnost cifre za vsak kovanec enaka p . Torej lahko slučajno spremenljivko X zapišemo kot vsoto n (neodvisnih) slučajnih spremenljivk Y_1, Y_2, \dots, Y_n , vsaka izmed katerih ima Bernoulli-jevo porazdelitev $Y_i \sim \text{Ber}(p)$. Kot vemo je $E(Y_i) = p$. Po večkratni uporabi zgornjega izreka pa tedaj velja tudi $E(X) = \sum_{i=1}^n E(Y_i) = np$. ▲

Zgornji izrek torej pokaže, da je matematično upanje aditivna funkcija, to je, za poljubni slučajni spremenljivki X in Y na istem verjetnostnem prostoru je $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$. Kako pa je s produktom? Ali vedno velja $E(XY) = E(X)E(Y)$?

ZGLED: Spomnimo se našega zgled meta dveh poštenih kock, pri katerem je X merila vsoto pik na obeh kockah, Y pa maksimum pik na obeh kockah. Upanje $E(X)$ zlahka izračunamo, saj je $X = X_1 + X_2$, kjer je X_1 število pik na prvi kocki, X_2 pa število pik na drugi kocki. Ker je seveda $E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}$, je po zgornjem izreku $E(X) = 7$. Seveda pa lahko upanje $E(X)$ izračunamo tudi direktno. Velja

$$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36},$$

to je, $E(X) = \frac{252}{36} = 7$. Podobno dobimo

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36}.$$

Za produkt XY po izreku 5.4 in zgornji tabeli velja

$$\begin{aligned} E(XY) &= 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{36} + 4 \cdot 3 \cdot \frac{2}{36} + 5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{36} \\ &+ 5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{36} + 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{36} + 6 \cdot 4 \cdot \frac{2}{36} + 6 \cdot 5 \cdot \frac{2}{36} + 7 \cdot 4 \cdot \frac{2}{36} \\ &+ 7 \cdot 5 \cdot \frac{2}{36} + 7 \cdot 6 \cdot \frac{2}{36} + 8 \cdot 4 \cdot \frac{1}{36} + 8 \cdot 5 \cdot \frac{2}{36} + 8 \cdot 6 \cdot \frac{2}{36} \\ &+ 9 \cdot 5 \cdot \frac{2}{36} + 9 \cdot 6 \cdot \frac{2}{36} + 10 \cdot 5 \cdot \frac{1}{36} + 10 \cdot 6 \cdot \frac{2}{36} \\ &+ 11 \cdot 6 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot 6 \cdot \frac{1}{36} \\ &= \frac{1232}{36} = \frac{308}{9}. \end{aligned}$$

V tem primeru torej $E(XY) \neq E(X)E(Y)$. ▲

Kot je zanimivo vprašanje ali je matematično upanje multiplikativna funkcija, je zanimivo tudi vprašanje ali je aditivna varianca, to je, ali vedno

velja $\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$? Pa malce računajmo (pri čemer uporabljamo aditivnost upanja):

$$\begin{aligned}\text{var}(X + Y) &= E((X + Y - E(X + Y))^2) = E(((X - E(X)) + (Y - E(Y)))^2) \\ &= \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\ &= \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2(E(XY) - E(X)E(Y)).\end{aligned}$$

Ta “dodatni člen” ima tolikšen pomen, da zasluži novo ime.

Definicija. Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki na verjetnostnem prostoru (S, P) . Tedaj je njuna *kovarianca* $\text{cov}(X, Y)$ enaka številu

$$\text{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Če je $\text{cov}(X, Y) > 0$, pravimo, da sta X in Y *pozitivno korelirani*. Podobno definiramo pojem negativne koreliranosti. Če je $\text{cov}(X, Y) = 0$, pravimo, da sta X in Y *nekorelirani*.

Po zgornjem računu je torej $\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$. Očitno velja tudi tale trditev.

Trditev 5.6. *Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki. Tedaj je $\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$ natanko tedaj, ko je $E(XY) = E(X)E(Y)$, kar se zgodi natanko tedaj, ko sta X in Y nekorelirani slučajni spremenljivki.*

V kakšni zvezi sta pojma neodvisnosti in nekoreliranosti slučajnih spremenljivk? Izkaže se, da eden implicira drugega, obratno pa ni vselej res.

Trditev 5.7. *Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki. Tedaj sta X in Y nekorelirani.*

DOKAZ: Napravimo dokaz za diskretni slučajni spremenljivki. Dokaz za zvezne slučajne spremenljivke gre podobno. Dokaz temelji na izreku 5.2, ki pove, da za neodvisni diskretni slučajni spremenljivki X in Y velja $P(X = a_i \wedge Y = b_j) = P(X = a_i)P(Y = b_j)$. \square

Da se videti, da obrat ne velja. Obstajajo torej pari nekoreliranih slučajnih spremenljivk, ki pa niso neodvisne. Primer na vajah.

Kaj torej meri kovarianca? Na nek način bi lahko rekli, da meri na kakšen način je ena spremenljivka odvisna od druge. Vendar pa je kovarianca odvisna od “spremembe enot”. Zato vpeljemo standardizirano kovarianco, ki ji rečemo korelacijski koeficient.

Definicija. Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki na verjetnostnem prostoru (S, P) . Tedaj je njun *korelacijski koeficient* $\rho(X, Y)$ definiran kot

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}}.$$

ZGLED: Ilustrirajmo vse skupaj na primeru. Naj bosta X in Y taki zvezni slučajni spremenljivki, da je gostota pripadajočega vektorja podana s predpisom

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{75}(2x^2y + xy^2) & ; 0 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

Bralec se bo hitro prepričal, da od tod za robni gostoti sledi

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2x}{225}(9x + 7) & ; 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y}{25}(3y + 12) & ; 1 \leq y \leq 2 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

Sedaj zlahka izračunamo upanji $E(X)$ in $E(Y)$. Dobimo $E(X) = \frac{109}{50}$ in $E(Y) = \frac{157}{100}$. Izračunamo še $E(XY) = \frac{171}{50}$, pa je

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{171}{50} - \frac{109}{50} \cdot \frac{157}{100} = -\frac{13}{5000}.$$

Zlahka se prepričamo, da velja tudi $\text{var}(X) = \frac{989}{2500}$ in $\text{var}(Y) = \frac{791}{10000}$, pa je

$$\rho(X, Y) = \frac{-\frac{13}{5000}}{\sqrt{\frac{989}{2500} \cdot \frac{791}{10000}}} \approx -0.0147.$$

Zlahka bi se prepričali, da bi v primeru, ko bi namesto X vzeli $1000X$ (recimo, namesto v kilometrih razdaljo merimo v metrih), dobili $\text{cov}(X, Y) = -\frac{13}{5}$, korelacijski faktor pa bi ostal nespremenjen. ▲

Kar smo opazili zgoraj, ni slučaj. Velja namreč tale trditev.

Trditev 5.8. Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki. Tedaj za poljubna realna števila $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ velja

$$(i) \text{var}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \text{var}(X).$$

$$(ii) \text{cov}(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) = \alpha\gamma \text{cov}(X, Y).$$

$$(iii) \rho(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) = \operatorname{sgn}(\alpha\gamma) \cdot \rho(X, Y).$$

$$(iv) -1 \leq \rho(X, Y) \leq 1.$$

Naloga 5.8. Imejmo poskus, pri katerem petkrat zapored vržemo pošten kovanec. Naj X meri število cifer v teh petih metih, Y pa število pojavitev dveh enakih zaporednih metov. Tako je na primer $Y(CCGGG) = 3$, $Y(CGCGC) = 0$ in $Y(CCCCC) = 4$. Izračunajte upanje $E(X + 2Y)$ in varianco $\operatorname{var}(X + Y)$. Določite še korelacijski koeficient $\rho(X, Y)$.

Naloga 5.9. Naj bosta X in Y diskretni slučajni spremenljivki na nekem verjetnostnem prostoru s slikama $X(S) = \{0, 5\}$ in $Y(S) = \{0, 1, 2\}$, pri tem pa naj velja $p_{X,Y}((0, 0)) = p_{X,Y}((5, 0)) = 1/8$, $p_{X,Y}((0, 1)) = p_{X,Y}((5, 2)) = 1/4$ in $p_{X,Y}((5, 1)) = 1/16$. Določite vrednost $p_{X,Y}((0, 2))$, nato pa izračunajte $\operatorname{var}(X)$, $\operatorname{var}(Y)$, $\operatorname{var}(X + Y)$ in $\operatorname{cov}(X, Y)$.

Naloga 5.10. Naj bo $X \sim U(0, 10)$ in naj bo $Y = X^2$. Določite koeficient korelacije $\rho(X, Y)$.

5.5 Neenakost Čebiševa in zakon velikih števil

Denimo, da opravljamo meritev pri nekem naravnem pojavu. Če opravimo meritev večkrat, vsakič v enakih pogojih, bi pričakovali, da bo meritev vsakič ista. In vendar ponavadi temu ni tako. Kako potem ugotoviti katera je prava vrednost? V praksi težavo premagamo tako, da meritev pri enakih pogojih ponovimo večkrat, potem pa vzamemo povprečje meritev. Izkaže se, da je ta metoda dobra. V tem razdelku se bomo prepričali, da je tudi matematično korektna. Morda velja omeniti, da je s to metodo A. A. Michelson leta 1879 izmeril hitrost svetlobe. Danes vemo, da je meter definiran tako, da svetloba za en meter potrebuje $\frac{1}{299\,792\,458}$ sekunde. Po tej definiciji metra je torej hitrost svetlobe enaka 299 792 458 metrov na sekundo. Michelson je že leta 1879 s svojimi meritvami hitrost svetlobe ocenil na $299\,944 \pm 51$ kilometrov na sekundo. Kot vidimo ni naredil prav velike napake.

Pa denimo, da neko meritev ponovimo n krat. Če meritev zares izvedemo vsakič pri "istih" pogojih in posamezne meritve ne vplivajo ena na drugo, si potemtakem lahko mislimo, da rezultat i -te meritve predstavlja slučajna spremenljivka X_i . Seveda imajo vse spremenljivke X_i isto porazdelitev. Označimo njeno matematično upanje z μ in njeno varianco s σ^2 . Če povprečje $\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ označimo z \bar{X} , potemtakem zaradi linearnosti upanja velja

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}(\mu + \mu + \dots + \mu) = \mu.$$

To pomeni, da ima povprečje enako upanje kot sama porazdelitev. Kako pa je z varianco? Zaradi neodvisnosti X_i je tudi varianca aditivna, torej dobimo

$$\text{var}(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i) = \frac{1}{n} \sigma^2.$$

To pomeni, da se varianca, oziroma razpršenost, na ta način zmanjša. Če vzamemo n dovolj velik, bo torej varianca povprečja praktično ničelna.

Predno si oglehamo naslednji primer se najprej spomnimo trditve 4.5, ki govori o tem, kako se pri translaciji in raztegu zvezne slučajne spremenljivke spremenita njena gostota in porazdelitvena funkcija. Potrebovali bomo še naslednjo trditev.

Trditev 5.9. *Naj bosta X in Y neodvisni zvezni slučajni spremenljivki z gostotama f_X in f_Y . Tedaj je gostota slučajne spremenljivke $Z = X + Y$ podana s predpisom $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$ za vse $z \in \mathbb{R}$.*

ZGLED: Oglejmo si naslednji primer. Naj bo $Z_n = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$, kjer ima vsaka od spremenljivk X_i eksponentno porazdelitev $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$. Označimo z f_X gostoto slučajne spremenljivke z eksponentno porazdelitvijo $\text{Exp}(\lambda)$. Po zgornji trditvi je torej

$$\begin{aligned} f_{Z_2}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_X(y)dy = \int_0^z \lambda e^{-\lambda(z-y)} \cdot \lambda e^{-\lambda y} dy = \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda z} \int_0^z dy = \lambda^2 z e^{-\lambda z}, \end{aligned}$$

za $z > 0$ (sicer je seveda $f_{Z_2}(z) = 0$). Podobno bi ugotovili, da je $f_{Z_3}(z) = \frac{\lambda^3}{2} z^2 e^{-\lambda z}$, itd. Za splošen n dobimo

$$f_{Z_n}(z) = \begin{cases} \frac{\lambda(\lambda z)^{n-1} e^{-\lambda z}}{(n-1)!} & ; z > 0 \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

Omenimo, da je to poseben primer takoimenovane Gamma porazdelitve. Slučajna spremenljivka Z ima *Gamma porazdelitev* s parametroma $\alpha > 0$ in $\lambda > 0$ (oznaka $Z \sim \text{Gamm}(\alpha, \lambda)$), če je njena gostota podana s predpisom

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{\lambda(\lambda z)^{\alpha-1} e^{-\lambda z}}{\Gamma(\alpha)} & ; z > 0 \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

Bralec se bo spomnil, da za gamma funkcijo velja $\Gamma(n) = (n-1)!$ in $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, ter da je v splošnem $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$.

Po zgornjem komentarju je torej za povprečje $\bar{X} = \frac{Z_n}{n}$ gostota podana s predpisom

$$f_{\bar{X}}(z) = n \cdot f_{Z_n}(nz) = \frac{\lambda n (\lambda n z)^{n-1} e^{-\lambda n z}}{(n-1)!}.$$

To pomeni, da ima vsota Z_n porazdelitev $Gamm(n, \lambda)$. ▲

Ta primer pokaže, da se z večanjem števila n vsa gostota vedno bolj "koncentrira" okrog upanja $E(X)$. Da ugotovimo kako zelo blizu upanju se ta gostota "koncentrira", bo v veliko pomoč naslednji izrek, znan pod imenom neenakost Čebiševa.

Izrek 5.10 (Neenakost Čebiševa). *Naj bo X poljubna slučajna spremenljivka in naj bo $a > 0$. Tedaj velja*

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{1}{a^2} \text{var}(X).$$

Malce površno bi torej lahko rekli, da ta neenakost pove, da je večina gostote skoncentrirana znotraj nekaj standardnih odklonov okrog upanja.

DOKAZ: Dokažimo neenakost za zvezno slučajno spremenljivko X . Dokaz za diskretne slučajne spremenljivke gre povsem analogno. Naj bo torej X zvezna slučajna spremenljivka z gostoto f_X in upanjem $E(X) = \mu$. Tedaj po izreku 4.2 velja

$$\text{var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx \geq \int_{|x-\mu| \geq a} (x - \mu)^2 f_X(x) dx \geq$$

$$\int_{|x-\mu| \geq a} a^2 f_X(x) dx = a^2 P(|X - \mu| \geq a).$$

□

Posledica 5.11. *Naj bo X slučajna spremenljivka z upanjem $E(X) = \mu$ in varianco $\text{var}(X) = \sigma^2$. Tedaj za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja*

$$P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

DOKAZ: Če v neenakost Čebiševa vstavimo $a = k\sigma$, dobimo $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2\sigma^2} \text{var}(X) = \frac{1}{k^2}$. To pomeni, da je $P(|X - \mu| < k\sigma) = 1 - P(|X - \mu| \geq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$. \square

To na primer pomeni, da je verjetnost, da je vrednost X znotraj treh standardnih odklonov okrog upanja, vsaj $\frac{8}{9}$, kar je približno 89 procentov.

Vrnimo se sedaj končno k vprašanju kaj se zgodi, če nas zanima povprečje n enako porazdeljenih neodvisnih slučajnih spremenljivk $Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$. Naj ima porazdelitev, po kateri se ravnaajo vse X_i , upanje μ in varianco σ^2 . Tedaj za povprečje Z_n velja $E(Z_n) = \mu$ in $\text{var}(Z_n) = \frac{\sigma^2}{n}$. Po neenakosti Čebiševa torej za vsak $\varepsilon > 0$ dobimo

$$P(|Z_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\sigma^2}{n}.$$

Ne glede na to kako majhen je ε , je to konstanta, torej gre desni izraz z večanjem vrednosti n v 0. S tem smo dokazali takoimenovani (šibki) zakon velikih števil.

Izrek 5.12 ((Šibki) zakon velikih števil). *Naj bo Z_n povprečje n neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z matematičnim upanjem μ . Tedaj za vsak $\varepsilon > 0$ velja*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Z_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0.$$