Verjetnost in statistika 2010/11

1. KOLOKVIJ

18. april 2011

1. Neki poskus ima 4 možne izide a, b, c, d, za katere velja:

   - Verjetnost dogodka $\{c\}$ je enaka eni petini verjetnosti nasprotnega dogodka.
   - Verjetnost izida b pri pogoju, da smo dobili izid b ali c, je enaka 3/5.
   - Dogodka $\{a, b\}$ in $\{a, c\}$ sta neodvisna.
   - Verjetnost izida a je manjša od 1/3.

   Določite verjetnost izida d.

2. 15 enakih knjig naključno razporedimo v rdečo, modro in zeleno škatlo. Nekatere od škatel lahko ostanejo prazne.

   (a) Kakšna je verjetnost, da je vsaj ena škatla prazna?

   (b) Kakšna je verjetnost, da dve škatli vsebujeta enako število knjig?

   Algebrskih izrazov ni potrebno izračunati.

3. Osebi A in B mečeta kovanec z verjetnostjo grba $p = \frac{2}{3}$. Če pade grb, dobi oseba A dve točki, če pade cifra, pa oseba B tri točke. Zmaga tisti, ki prvi zbere 6 točk.

   (a) Posamezno igro lahko predstavimo kot besedo iz črk G in C (npr. GCC). Zapišite množico S vseh možnih iger (izidov) in izračunajte verjetnost vsakega izida.

   (b) Izračunajte verjetnost zmage osebe A in pogojno verjetnost zmage A, če je igra trajala 3 mete.

   (c) Slučajna spremenljivka X naj pomeni število cifer v posamezni igri. Določite verjetnosti $P(X = k)$ za vse možne vrednosti $k \in X(S)$ in matematično upanje $E(X)$.

4. Študent zna odgovoriti na natanko 7 od 10 izpitnih vprašanj. Na izpitu dobi 3 različna naključno izbrana vprašanja.

   (a) Denimo, da se študent z verjetnostjo 0.2 zmoti pri vprašanjih, ki jih zna. Za uspešen izpit mora pravilno odgovoriti vsaj na dve vprašanji. Kakšna je verjetnost, da opravi izpit?

   (b) Naj bo X število ugodnih vprašanj, ki jih je dobil študent. Zapišite izraz za $P(X = k)$ in določite tip slučajne spremenljivke X.

Vsaka naloga je vredna 10 točk. Čas za reševanje je 120 minut. Veliko uspeha!

Rešitev

1. Elementarne dogodke $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$ pišimo kar kot izide a, b, c, d. Potem velja:
   - $P(c) = \frac{1}{5}(1 - P(c))$, torej je $P(c) = 1/6$.
   - $P(b|\{b, c\}) = \frac{P(b)}{P(b)+P(c)} = \frac{3}{5}$, od koder dobimo $P(b) = \frac{1}{4}$.
   - Neodvisnost pomeni $P(\{a, b\} \cap \{a, c\}) = P(\{a, b\})P(\{a, c\})$ oziroma
   $$P(a) = (P(a) + P(b))(P(a) + P(c)).$$
   Dobljena kvadratna enačba $P(a)^2 + \frac{-7}{12}P(a) + \frac{1}{24} = 0$ ima dve rešitvi $P(a) = \frac{7\pm5}{24}$.
   - Iz pogoja $P(a) < \frac{1}{3}$ zdaj sledi $P(a) = \frac{1}{12}$.

   Sledi $P(d) = 1 - P(\{a, b, c\}) = 1 - (\frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}) = \frac{1}{2}$.

2. (a) Ker so knjige enake, razporeditev v tri različne škatle pomeni, da med knjige v vrsti postavimo 2 ločilni polici na eno izmed $15 + 2$ možnih mest, torej je vseh razporeditev $\binom{15+2}{2}$. Če takoj vložimo v vsako škatlo po eno knjigo, lahko preostalih 12 razporedimo na $\binom{12+2}{2}$ načinov. Sledi
   $$P(\text{vsaj ena škatla prazna}) = 1 - P(\text{nič praznih škatel}) = 1 - \frac{\binom{14}{2}}{\binom{17}{2}} = \frac{45}{136} \doteq 0.33.$$
   Lahko bi uporabili tudi načelo vključitev in izključitev. Označimo z M,R,Z množice razporeditev, pri katerih je prazna modra, rdeča oziroma zelena škatla. Potem je $M \cup R \cup Z$ množica vseh razporeditev, pri katerih je prazna vsaj ena škatla. Sledi $|M \cup R \cup Z| = 3|M| - 3|M \cap R| + |M \cap R \cap Z| = 3\binom{16}{1} - 3 + 0 = 45$ in od tod isti rezultat kot prej.

   (b) Velja $15 = 2 \cdot 0 + 15 = 2 \cdot 1 + 13 = 2 \cdot 2 + 11 = 2 \cdot 3 + 9 = 2 \cdot 4 + 7 = 2 \cdot 5 + 5 = 2 \cdot 6 + 3 = 2 \cdot 7 + 1$. Če je v dveh škatlah 0 knjig in v eni 15, imamo za škatlo s 15 knjigami 3 različne možnosti. Podobno velja v ostalih situacijah, razen, ko je v vseh treh škatlah 5 knjig - tedaj je možnost ena sama. Sledi
   $$P(\text{dve škatli enako knjig}) = \frac{3+3+3+3+3+1+3+3}{\binom{17}{2}} = \frac{22}{136} \doteq 0.16.$$

3. (a) Dobimo 10 možnih iger. Igre z zmago A so GGG (verjetnost $p^3 = \frac{8}{27}$) in $CGGG, GCGG, GGCG$ (vsaka z verjetnostjo $p^3q = \frac{8}{81}$). Igre z zmago B pa so CC (z verjetnostjo $q^2 = 1/9$), GCC, GCG (vsaka z verjetnostjo $q^2p = 2/27$) in $GGCC, GCGC, CGGC$ (vsaka z verjetnostjo $q^2p^2 = 4/81$).

   (b) Iz prejšnje točke sledi
   $$P(A) = P(\{GGG, CGGG, GCGG, GGCG\}) = \frac{8}{27} + 3\frac{8}{81} = \frac{16}{27} \quad \text{(igra torej ni poštena)}$$
   in
   $$P(A|\text{igra traja tri mete}) = \frac{P(\{GGG\})}{P(\{GCC, CGC, GGG\})} = \frac{(2/3)^3}{2(2/3)(1/3)^2 + (2/3)^3} = \frac{2}{3}.$$

   (c) X lahko zavzame le vrednosti $0, 1, 2$. Izračunamo
   $$P(X = 0) = P(\{GGG\}) = p^3 = 8/27,$$
   $$P(X = 1) = P(\{CGGG, GCGG, GGCG\}) = 3p^3q = 8/27,$$
   $$P(X = 2) = 1 - P(A) = 11/27.$$
   Sledi $E(X) = 0 \cdot \frac{8}{27} + 1 \cdot \frac{8}{27} + 2 \cdot \frac{11}{27} = \frac{30}{27}$.

4. (a) Naj bo A_i dogodek, da študent dobi i vprašanj, ki jih zna odgovoriti, in B dogodek, da opravi izpit. Potem je $\{A_0, \ldots, A_3\}$ popoln sistem dogodkov. Ker je $P(B|A_0) = P(B|A_3) = 0$, po Izreku o popolni verjetnosti sledi
   $$P(B) = P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)$$
   $$= 0.8^2 \frac{\binom{7}{2}\binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} + (3 \cdot 0.8^2 \cdot 0.2 + 0.8^3)\frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}} \doteq 0.6.$$

   (b) $P(X = k) = \frac{\binom{7}{k}\binom{3}{3-k}}{\binom{10}{3}}$ za $k = 0, 1, 2, 3$ in $X \sim \text{HGeo}(3, 10, 7)$.

Verjetnost in statistika 2010/11

2. KOLOKVIJ

6. junij 2011

1. Na daljici $[0,1]$ naključno in z enako verjetnostjo izberemo dve točki, ki daljico razdelita na tri dele. Kakšna je verjetnost, da iz njih **ne** moremo sestaviti trikotnika?

2. Nepošten kovanec z verjetnostjo grba $1/3$ vržemo 3000-krat in z X označimo število padlih grbov. Naj bo a verjetnost dogodka, da je $950 < X < 1050$.

   (a) Zapišite točen algebrski izraz za a.

   (b) Izračunajte približek za a s pomočjo normalne aproksimacije binomske porazdelitve in verjetnostne tabele za standardizirano normalno porazdelitev (nariši skico!).

   (c) Ocenite spodnjo mejo za a z uporabo neenačbe Čebiševa.

3. Za diskretni slučajni spremenljivki X, Y velja

$$P_{(X,Y)}(x,y) = P(X = x, Y = y) = \begin{cases} c(2x+y), & x \in \{0,1,2\}, y \in \{0,1,2,3\} \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}.$$

   (a) Tabelirajte vrednosti X, Y in določite vrednost konstante c.

   (b) Izračunajte verjetnosti $P(X = 2, Y = 1)$ in $P(X \geq 1, Y \leq 2)$.

   (c) Določite robno porazdelitev za X, torej vrednosti $P(X = x)$ za vse x.

   (d) Ali sta X in Y neodvisni? Izračunajte kovarianco $\operatorname{cov}(X, Y)$.

4. Za neodvisni zvezni slučajni spremenljivki X in Y velja $X \sim \text{Exp}(2)$ in $f_Y(y) = \begin{cases} 9ye^{-3y}, & y > 0 \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$

   Izračunajte naslednje verjetnosti:

   (a) $P(0 \leq X \leq 1, 0 \leq Y \leq 1)$.

   (b) $P(X + Y > 1)$.

   (c) $P(1 < X < 2)$.

Vsaka naloga je vredna 10 točk. Čas za reševanje je 120 minut. Veliko uspeha!

Rešitev

1. Označimo izbrani točki z X in Y, tedaj daljica razpade na kose dolžin X, $Y-X$ in $1-Y$. Celoten prostor dogodkov je kvadrat $[0,1]\times[0,1]$ s ploščino 1. Če je $X<Y$, potem lahko trikotnik sestavimo le v primeru, ko je $X+(Y-X)\geq 1-Y$, $X+(1-Y)\geq Y-X$ in $(Y-X)+(1-Y)\geq X$. Ustrezno območje v ravnini je trikotnik z oglišči $(0,1/2)$, $(1/2,1/2)$ in $(1/2,1)$, ki ima ploščino $1/8$ (nariši skico!). Primer $Y<X$ je seveda simetričen. Sledi, da je iskana verjetnost enaka $1-2\cdot 1/8=3/4$.

2. (a) $a=\sum_{k=951}^{1049}\binom{3000}{k}(1/3)^k(2/3)^{3000-k}$.

   (b) X aproksimiramo z $Y\sim \text{Nor}(1000,\frac{2000}{3})$. Standardiziramo $Y'=\frac{Y-1000}{\sqrt{2000/3}}=\frac{Y-1000}{25.82}$. Sledi

   $$P(950<X<1050)\doteq P(950.5<Y<1049.5)\doteq P(-1.92<Y'<1.92)=2\cdot P(0<Y'<1.92)\doteq 0.9452.$$

   (c) Po NČ velja $P(|X-1000|\geq 50)\leq 4/15$, torej je $P(|X-1000|<50)>11/15\doteq 0.73$.

3. (a)

$p_{X,Y}$	0	1	2	3
0	0	c	$2c$	$3c$
1	$2c$	$3c$	$4c$	$5c$
2	$4c$	$5c$	$6c$	$7c$

   Ker je vsota vseh elementov v tabeli enaka $42c$, sledi $c=1/42$.

   (b) $P(X=2,Y=1)=5/42$ in $P(X\geq 1,Y\leq 2)=4/7$.

   (c) $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3/21 & 7/21 & 11/21\end{pmatrix}$.

   (d) Nista neodvisni (npr. $P(X=0)=7/42$, $P(Y=0)=6/42$, toda $P(X=0,Y=0)=0\neq P(X=0)P(Y=0)=1$. Za kovarianco izračunamo še $Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 6/42 & 9/42 & 12/42 & 15/42\end{pmatrix}$ in $XY\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6\\ 12/42 & 3/42 & 9/42 & 5/42 & 6/42 & 7/42\end{pmatrix}$. Sledi $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{51}{21}-\frac{29}{21}\cdot\frac{39}{21}=-\frac{20}{147}$.

4. Velja $f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0.\end{cases}$. Ker sta X,Y neodvisni, sledi $f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}18ye^{-2x-3y}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{sicer.}\end{cases}$
   Od tu naprej je naloga zgolj vaja iz dvojnih integralov. Pri vsakem primeru narišite skico!

   (a) $P(0\leq X\leq 1,0\leq Y\leq 1)=\int_0^1\int_0^1 18ye^{-2x-3y}dx\,dy=1-e^{-2}-4e^{-3}+4e^{-5}\doteq 0.69$.

   (b) $P(X+Y>1)=1-\int_0^1\int_0^{1-y}18ye^{-2x-3y}dx\,dy=1-9e^{-2}+14e^{-3}\doteq 0.48$.

   (c) $P(1<X<2)=\int_1^2\int_0^\infty 18ye^{-2x-3y}dx\,dy=e^{-2}-e^{-4}\doteq 0.12$.

Verjetnost in statistika 2010/11

Pisni izpit

13. junij 2011

1. V štiri ovojnice z naslovi naključno vložimo štiri pripravljena pisma. Kakšna je verjetnost, da bodo vsa pisma v pravih ovojnicah? Kakšna je verjetnost, da bo vsaj eno pismo v pravi ovojnici?

2. Verjetnost, da se rodi fant, je 1/2. Neka družina ima 4 otroke.
   (a) Kakšna je verjetnost, da imajo vsaj enega fanta?
   (b) Kakšna je verjetnost, da imajo vsaj enega fanta in vsaj eno deklico?
   (c) Kakšna je verjetnost, da imajo 2 fanta, če se je zadnja rodila deklica?
   (d) Naj bo X število fantov v družini. Določite varianco in standarni odklon za X.

3. Vržemo dve pošteni kocki. Vrednost slučajne spremenljivke X naj bo število padlih šestic, vrednost slučajne spremenljivke Y pa absolutna vrednost razlike med padlima številoma pik.
   (a) Opišite prostor izidov S in dogodek $A \sim$ pade natanko ena šestica.
   (b) Tabelirajte vrednosti $P(X = x, Y = y)$ in določite robni porazdelitvi $P(X = x)$, $P(Y = y)$.
   (c) Izračunajte kovarianco $\mathrm{cov}(X, Y)$ in korelacijski koeficient $\sigma(X, Y)$. Ali sta X in Y neodvisni?

4. Naključno zapišemo 10.000 cifer od 0 do 9 z X označimo število zapisanih ničel. Naj bo a verjetnost dogodka, da je $900 < X < 1000$.
   (a) Zapišite točen algebrski izraz za a.
   (b) Izračunajte približek za a s pomočjo normalne aproksimacije binomske porazdelitve in verjetnostne tabele za standardizirano normalno porazdelitev (nariši skico!).
   (c) Ocenite spodnjo mejo za a z uporabo neenačbe Čebiševa.

5. Slučajni spremenljivki X, Y imata skupno gostoto

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} cxy, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

   (a) Ali sta X, Y neodvisni?
   (b) Izračunajte $P(1/2 < X < 1)$.
   (c) Izračunajte $P(Y \geq 1)$.
   (d) Izračunajte $P(1/2 < X < 1, Y \geq 1)$.

Vsaka naloga je vredna 10 točk. Čas za reševanje je 120 minut. Veliko uspeha!

Verjetnost in statistika 2010/11

Pisni izpit

1. september 2011

1. Neki poskus ima 4 možne izide a, b, c, d, za katere velja:
   - Verjetnost dogodka $\{a, b\}$ je enaka verjetnosti komplementa dogodka $\{a, d\}$.
   - Verjetnost dogodka $\{a, b\}$ pri pogoju, da se je zgodil dogodek $\{b, c, d\}$, je enaka verjetnosti izida c pri pogoju, da se je zgodil dogodek $\{b, c, d\}$.
   - Dogodka $\{a, b\}$ in $\{b, c\}$ sta neodvisna.

   Določite verjetnost izida d.

2. Študent je za izpit preštudiral le 30 vprašanj od 40 možnih. Če dobi vprašanje, ki ga je preštudiral, bo nanj pravilno odgovoril z verjetnostjo 0.8. Če dobi vprašanje, ki ga ni preštudiral, bo odgovor uganil z verjetnostjo 0.2. Na izpitu dobi 3 vprašanja, vsaj na dve pa mora odgovoriti pravilno.
   (a) Kakšna je verjetnost, da študent opravi izpit?
   (b) Če je študent izpit opravil, kakšna je verjetnost, da pri tretjem vprašanju pravilno uganil odgovor, ki ga ni naštudiral?

3. Par kovancev mečemo, dokler ne padeta dve cifri. Verjetnost padca cifre za prvi kovanec je 1/2, verjetnost cifre za drugega pa 1/3.
   (a) Naj bo X število metov v posamezni igri. Opišite porazdelitev $P(X = x)$, določite upanje $E(X)$ in varianco $\mathrm{var}(X)$.
   (b) Naj bo Y število metov, v katerih sta padla dva grba. Opišite pogojno porazdelitev $P(Y = y|X \leq 3)$. Ali sta X in Y neodvisni?

4. V slovenskih besedilih se črka V v povprečju pojavi 4-krat na vsakih 100 znakov. Naj bo X število pojavitev črke V v nekem naključno izbranem slovenskem besedilu, ki ima 3000 znakov. Naj bo a verjetnost dogodka, da je $100 < X < 140$.
   (a) Zapišite točen algebrski izraz za a.
   (b) Izračunajte približek za a s pomočjo normalne aproksimacije binomske porazdelitve in verjetnostne tabele za standardizirano normalno porazdelitev (nariši skico!).
   (c) Ocenite spodnjo mejo za a z uporabo neenačbe Čebiševa.

5. Slučajni spremenljivki X, Y imata gostoto

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1/y & 0 < x < y, 0 < y < 1 \\ 0 & \textit{sicer.} \end{cases}$$

   (a) Ali sta X in Y neodvisni?
   (b) Določite $P(X > 1/2)$ in $P(X < 1/2, Y > 1/3)$.
   (c) Določite $P(X + Y > 1/2)$.

Vsaka naloga je vredna 10 točk. Čas za reševanje je 120 minut. Veliko uspeha!