3. Seminar - TEMA

Seminar 14. 10.

Sistem $n \times n$ linearnih enačb:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n} &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n} &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn} &= b_n \end{aligned}$$

lahko zapišemo v matrični obliki $Ax = b$, kjer $A = [a_{jk}]_{j,k=1,\ldots,n}$, $x = [x_j]_{j=1,\ldots,n}$, $b = [j_j]_{j=1,\ldots,n}$, ali pa obratno matrično enačbo zapišemokot sistem enačb.

1. Dani sta matriki $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Matrični enačbi $Ax = 0$ oziroma $Bx = 0$, kjer je $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, zapiši kot sistema enačb in ju reši.

   (b) Ali je katera od A in B kot preslikava injektivna (obrnljiva)? Matrika M kot linearna preslikava je injektivna, če se dva različna stolpca $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ in $x' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$ preslikata v različna stolpca oziroma, če je reštev enačbe $Mx = 0$ natanko $x = 0$ (opazite $M(x - x') = Mx - Mx'$).

   (c) Izračunaj $\det A$ in $\det B$. Ali bi lahko že na podlagi tega sklepali, koliko rešitev imata enačbi $Ax = 0$ oziroma $Bx = 0$, oziroma ali je katera izmed A in B obrnljiva?

   (Opomba: V splošnem velja izrek: $\det M \neq 0$ natanko tedaj, ko obstaja inverzna matrika M^{-1} matrike M.)

2. Naj bo A $n \times n$ matrika.

   (a) Koliko rešitev ima enačba (sistem enačb) $Ax = b$, če je matrika A obrnljiva?

   (b) Kaj determinanta $\det A$ pove o rešljivosti enačbe $Ax = b$ (sistema $n \times n$ linearnih enačb)?

   (c) Koliko rešitev ima lahko enačba $Ax = 0$ (sistem $n \times n$ linearnih enačb z ničelnimi desnimi stranmi)? Kaj nam o tem pove determinanta.