

4. sklop seminarjev - 30.10.2024

1. (Tarik Kolaković) Dana je matrika $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

- (a) Izračunajte lastni vrednosti in lastna vektorja matrike A .
- (b) Lastna vektorja matrike A zložite v matriko P in izračunaj njen inverz P^{-1} .
- (c) Naj o_n in m_n predstavljata števili odraslih oziroma mladih medvedov v n -ti generaciji medvedov na nekem območju. Predpostavimo, da velja naslednja zveza med številčnostjo dveh zaporednih generacij:

$$V_{n+1} = AV_n \quad (\text{množenje je matrično}), \quad \text{kjer je } V_n := \begin{bmatrix} o_n \\ m_n \end{bmatrix}.$$

Koliko je bilo medvedov v 3. generaciji, t.j. torej $V_3 = AV_2 = AAV_1 = A^2V_1$, če je 1. generacija, ki je naselila območje, štela 50 odraslih medvedov s 30 mladiči (t.j. $o_1 = 50$, $m_1 = 30$ oziroma $V_1 = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \end{bmatrix}$)?

- (d) Koliko pa bo medvedov v 30. generaciji, t.j. koliko je $V_{30} = A^{29}V_1$? (Nasvet: Izračunajte $A^{29} = (PDP^{-1})^{29} = PD^{29}P^{-1}$, kjer sta stolpca P lastna vektorja matrike A , matrika D pa je diagonalna matrika lastnih vrednosti A .)

Opomba: Večino računanja je potrebno opraviti v točkah (a) in (b), v točki (d) se bolj ali manj le uporabi že dobljene rezultate.