7. Seminar - TEMA - 11. 11. 2024

Taylorjev izrek. Za $(n+1)$-krat (zvezno) odvedljivo funkcijo f na intervalu $(a-r, a+r)$ okrog točke $x = a$ velja:

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n+o(x), \quad x \in (a-r, a+r),$$

kjer je $|o(x)| \leq \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} \max_{x\in(a-r,a+r)} |f^{(n+1)}(x)|$.

Posledica. Naj bo $f''(x) > 0$ (oziroma $f''(x) < 0$) za vse $x \in (c, d)$.

- Potem leži graf f nad (oziroma pod) vsemi tangentami na tem intervalu, t.j. f je konveksna (oziroma konkavna) na (c, d).
- Če je $a \in (c, d)$ stacionarna točka f, je v a lokalni minimum (maksimum).

1. Izračunaj prvih pet odvodov funkcije $f(x) = \sin x$ v točki $a = 0$. Oceni, kako natančnost naslednjih približkov:
$$\sin x \approx x, \quad \sin x \approx x + \frac{x^3}{3}, \qquad |x| < \frac{1}{10}.$$
2. Funkcijo $g(x) = e^x$ okrog točke $x = 0$ aproksimiraj s polinomom pete stopnje. Kako natančen je ta približek na intervalu $[-2, 2]$?
3. Klasificiraj stacionarne točke in določi intervale konveksnosti in konkavnosti ter prevoje funkcij $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$ in $g(x) = e^{-x^2}$.
(Opomba: Prevoj funkcije je točka, kjer funkcija preide iz konkavnosti v konveksno oziroma obratno. Drugi odvod v prevojnih točkah je enak 0.)