

9. Seminar - TEMA - 25.11.2024

Definicija. Za zvezno funkcijo f na intervalu $[a, b]$ in delitev tega intervala $\mathcal{D}: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ definiramo spodnjo/zgornjo Darbouxjevo vsoto:

$$s(f, \mathcal{D}) = \sum_{j=1}^n \min_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)(x_j - x_{j-1}), \quad S(f, \mathcal{D}) = \sum_{j=1}^n \max_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)(x_j - x_{j-1}).$$

Trditev. Za zvezno funkcijo f na intervalu $[a, b]$ in delitev tega intervala $\mathcal{D}: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ velja:

$$s(f, \mathcal{D}) \leq \int_a^b f(x) dx \leq S(f, \mathcal{D}).$$

Opomba. Finejša kot je delitev (t.j. bližje kot so točke delitve), bližje sta Darbouxjevi vsoti integralu.

1. Dana je funkcija $f(x) = x$ na intervalu $[0, 1]$ in delitev tega intervala $\mathcal{D}_n: a = 0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < 1$.

(a) Izračunaj spodnjo in zgornjo Darbouxjevo vsoto $s(f, \mathcal{D}_n)$ in $S(f, \mathcal{D}_n)$.

(b) Izračunaj limiti $\lim_{n \rightarrow \infty} s(f, \mathcal{D}_n)$ in $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \mathcal{D}_n)$. Koliko je $\int_a^b x dx$?

2. Dana je funkcija $g(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in [0, \pi]$. Dani interval razdeli na 4 enake podintervale in izračunaj pripadajoči Darbouxjevi vsoti funkcije f glede na to delitev.

3. Dana je funkcija $f(x) = \frac{1}{1+x}$,

(a) Za $n \in \mathbb{N}$ naj bo $\mathcal{D}_n: 0 < 1 < 2 < \dots < n-1 < n$ delitev intervala $[0, n]$. Zapiši zgornjo in spodnjo Darbouxjevo vsoto funkcije f pri dani delitvi \mathcal{D}_n .

(b) Dobljeni Darbouxjevi vsoti po velikosti primerjaj z določenim integralom dane funkcije, $\int_0^n f(x) \frac{dx}{1+x}$, da dobiš oceno:

$$\ln(n) + 1 \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \geq \ln(n+1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

(c) (Problem skladovnice opek) Na mizo postavimo kvadrasto opeko, da jo $\frac{1}{n+1}$ gleda čez rob mize, nanjo položimo drugo opeko tako, da jo $\frac{1}{n}$ gleda čez prvo opeko. Postopek nadaljujem dokler ne položimo zadnje n -te opeke, ki jo polovica gleda čez rob predzadnje opeke. Ali se skladovnica za kakšen n lahko podre? Kako daleč lahko pridemo z opekami?