

8. sklop - MANA - 27.11. 2024

Glede na evidenco s spletne učilnice sem pri vsaki nalogi pripisal, kdo jo bo predstavil/a. (Če je mišljeno kako drugače, mi prosim pišite, pa bom popravil.)

1. (Izpeljava trapezne formule) Dana je funkcija $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in delitev danega intervala $\mathcal{D}: a = x_0 < x_1 < x_2 \dots x_{n-1} < x_n = b$.

(a) Za dano delitev \mathcal{D} in funkcijo f definiramo izraz

$$T(\mathcal{D}, f) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(f(x_i) + f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}).$$

Posamezen člen v vsoti predstavlja ploščino trapeza z osnovnicama dolžin $f(x_i)$ oziroma $f(x_{i-1})$ ter višino dolžine $(x_i - x_{i-1})$. Kaj geometrijsko predstavlja zgornja vsota? Nariši sliko.

- (b) Pokaži, da v posebnem primeru, ko so podintervali dane delitve enako veliki (t.j. $h := \frac{b-a}{n}$ za vse $i \in \{1, \dots, n\}$), $\mathcal{D}: a < a + h < a + 2h < a + 3h < \dots < a + nh = b$, velja *trapezna formula*:

$$T(\mathcal{D}, f) = \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)), \quad x_i = a + ih. \quad (1)$$

- (c) Izračunaj $T(\mathcal{D}, f)$ za funkcijo $f(x) = e^{-x^2}$ za primer, ko je \mathcal{D} delitev intervala $[-1, 1]$ na štiri enake podintervale, t.j. $h = \frac{2}{4}$ in $-1 = x_0 < x_1 = -\frac{1}{2} < x_2 = 0 < x_3 = \frac{1}{2} < x_4 = 1$.

2. (Uporaba trapezne formule) Z uporabo trapezne formule (1) izračunaj $T(\mathcal{D}', f)$ za funkcijo $f(x) = e^{-x^2}$ in delitev \mathcal{D}' delitev intervala $[-1, 1]$ na osem enakih podintervalov, t.j. $h = \frac{2}{8}$ in $-1 = x_0 < x_1 = -\frac{3}{4} < x_2 = -\frac{1}{2} < x_3 = -\frac{1}{4} < x_4 = 0 < x_5 = \frac{1}{4} < x_6 = \frac{1}{2} < x_7 = \frac{3}{4} < x_8 = 1$.